

**TAMPEREEN YLIOPISTO**

**Kehittämistutkimus kertolaskun oppimisesta ja  
opettamisesta peruskoulun 2. luokalla**

Kasvatustieteiden tiedekunta

Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma

**MAIJU KORPELA**

Maaliskuu 2017

Tampereen yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

MAIJU KORPELA: Kehittämistutkimus kertolaskun oppimisesta ja opettamisesta peruskoulun 2. luokalla

Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma, 103 sivua, 32 liitesivua

Maaliskuu 2017

---

Tutkimuksen tarkoituksena oli perehtyä kertolaskun oppimiseen ja opettamiseen peruskoulun toisella luokalla. Tutkimus toteutettiin kehittämistutkimuksena, jonka tavoitteena oli kehittää pedagogisesti perusteltu ja monipuolinen oppimateriaalipaketti kertolaskun käsitteen sekä kertotaulujen 1–5 ja 10 opettamiseen toisella luokalla. Oppimateriaalin tehtävien ja harjoitusten kehittämisen taustalla vaikuttivat Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) lisäksi kielentämisen periaate matemaattisen ajattelun ilmaisusta neljän eri kielen keinoin sekä Solmu-ohjelman lukumääräpalojen käyttö opetuksessa konkreettisena toimintamateriaalina. Näiden lisäksi kehittämistä taustoitettiin tarkastelemalla aiempia tutkimuksia matematiikan oppikirjoista, olemassa olevia matematiikan oppikirjoja kertolaskun opetuksen osalta sekä aiempaa tutkimuskirjallisuutta kertolaskun oppimiseen ja opettamiseen liittyen.

Tutkimus eteni kehittämistutkimukselle tyypillisten vaiheiden mukaisesti. Ensin ongelma-analyysin vaiheessa tarkasteltiin kehittämisen taustalla vaikuttavia teoreettisia lähtökohtia, joiden pohjalta kehitettiin hahmotelma oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta. Sen jälkeen oppimateriaalin tehtäviä ja harjoituksia testattiin käytännössä erään tamperelaisen koulun 2. luokassa, jossa oli 24 oppilasta. Opetusjakson aikana materiaalin ensimmäistä versiota täydennettiin ja kehitettiin edelleen vastaamaan paremmin oppilaiden tarpeita. Lopulta oppimateriaalin ensimmäistä versiota arvioitiin kokonaisuudessaan oppitunneilla kuvattujen videoiden, havaintopäiväkirjaan kirjattujen havaintojen, oppilaiden täyttämien kyselylomakkeiden sekä oppilaiden tekemien tehtävämonisteiden ja jakson loppukokeen perusteella. Tätä aineistoa analysoitiin sisällönanalyysin sekä kvantitatiivisen kuvailun keinoin.

Opetuskokeilun perusteella tehty arviointi osoitti, että oppimateriaalin ensimmäinen versio oli kokonaisuuden kannalta onnistunut, mutta kuitenkin useita kehittämiskohteitakin löytyi. Kehittämistutkimuksen luonteen mukaisesti näihin kehittämistarpeisiin puututtiin ja oppimateriaalista kehitettiin vielä toinen paranneltu versio, joka on tämän tutkimuksen lopullinen tuotos. Lopulta oppimateriaalista muotoutui kokonaisuus, jonka tehtävissä ja harjoituksissa hyödynnetään monipuolisesti konkreettisten toimintamateriaalien käyttöä, kuvioiden piirtämistä sekä luonnollisen kielen käyttöä oppimisen tukena matematiikan symbolikielen rinnalla. Oppimateriaalin tehtävät ja harjoitukset on tarkoitettu käytettäväksi opetuksessa käytössä olevan oppikirjan rinnalla opetuksen monipuolistamiseksi. Tehtävät ja harjoitukset voidaan niiden oppimistavoitteen perusteella jakaa neljään kategoriaan, jotka ovat kertolaskun käsite, kertotaulut, vaihdannaisuus ja yhdistetyt laskutoimitukset sekä kertaustehtävät ja koe.

Opetuskokeilun perusteella saatiin selville, että kielentämisen periaate matemaattisen ajattelun ilmaisusta neljän kielen keinoin soveltui hyvin kertolaskun ja kertotaulujen opetuksen pedagogiseksi lähtökohdaksi. Moniulotteinen lähestymistapa kertolaskun käsitteeseen näytti johtavan ymmärtävään kertolaskun käsitteen oppimiseen. Lisäksi Solmu-ohjelman lukumääräpalat näyttivät soveltuvan kertolaskun opetukseen hyväksi toimintamateriaaliksi monien ominaisuuksiensa vuoksi. Opetuskokeilun ja aikaisemman tutkimuskirjallisuuden perusteella tärkeäksi kertolaskun opetuksen periaatteeksi osoittautui oikeanlaisen tasapainon löytäminen ymmärtämistä korostavan opetuksen ja mekaanisen harjoittelun välillä, jotta lopputuloksena on sekä kertolaskun käsitteen ymmärtäminen että sujuvan kertolaskutaidon saavuttaminen.

Avainsanat: kehittämistutkimus, matematiikan opetus, kertolasku, kielentäminen, oppimateriaali

# SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>JOHDANTO</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>KEHITTÄMISTUTKIMUS</b>	<b>8</b>
2.1	KEHITTÄMISTUTKIMUS TUTKIMUSMENETELMÄNÄ	8
2.2	KEHITTÄMISTUTKIMUKSEN TOTEUTUMINEN TÄSSÄ TUTKIMUKSESSA	11
<b>3</b>	<b>MATEMATIIKAN OPETUS PERUSOPETUKSEN OPPIMATERIAALIEN JA OPETUSSUUNNITELMAN NÄKÖKULMISTA</b>	<b>14</b>
3.1	OPPIMATERIAALIT MATEMATIIKAN OPETUKSESSA	14
3.2	PERUSOPETUKSEN OPETUSSUUNNITELMAN PERUSTEET 2014 MATEMATIIKAN OPETUKSEN OHJAAJANA	16
<b>4</b>	<b>KIELENTÄMINEN JA SOLMU-OHJELMA PEDAGOGISINA LÄHESTYMISTAPOINA MATEMATIIKAN OPETUKSESSA</b>	<b>19</b>
4.1	KIELENTÄMINEN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA	19
4.1.1	<i>Kielentämisen neljä eri ulottuvuutta</i>	21
4.1.2	<i>Koodinvaihto eri kielten välillä</i>	24
4.2	SOLMU-OHJELMA MATEMATIIKAN OPETUKSESSA	25
<b>5</b>	<b>KERTOLASKUN OPPIMINEN JA OPETTAMINEN</b>	<b>28</b>
5.1	KERTOLASKUN KÄSITTEEN OPPIMINEN JA OPETTAMINEN	29
5.2	KERTOLASKUJEN LASKEMISEN ERILAISET STRATEGIAT	32
5.3	KERTOLASKU PERUSOPETUKSEN OPIKIRJOISSA	33
<b>6</b>	<b>TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET</b>	<b>35</b>
<b>7</b>	<b>TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN</b>	<b>37</b>
7.1	TUTKIMUKSEN ETENEMINEN	37
7.2	AINEISTON KÄSITTELY JA ANALYSOINTI	40
<b>8</b>	<b>KERTOLASKUN OPPIMATERIAALIN ENSIMMÄINEN VERSIO</b>	<b>45</b>
8.1	SUUNNITTELU JA KEHITTÄMINEN	45
8.2	KUVAUS SISÄLLÖSTÄ JA RAKENTEESTA	49
8.3	OPPIMATERIAALIN ARVIOINTI	52
8.3.1	<i>Oppisisältöjen oppimisen näkökulma</i>	53
8.3.2	<i>Tutkivan opettajan näkökulma</i>	57
8.3.3	<i>Oppilaiden näkökulma</i>	63
<b>9</b>	<b>YHTEENVETO</b>	<b>71</b>
9.1	KERTOLASKUN KÄSITTEEN YMMÄRTÄMISEEN JA KERTOTAUJEN OPPIMISEEN VAIKUTTAVIA TEKIJÖITÄ	71
9.2	YHTEENVETOA OPPIMATERIAALIN ENSIMMÄISESTÄ VERSIOSTA TESTAUSJAKSON PERUSTEELLA	74
9.3	OPPIMATERIAALIN ENSIMMÄISEN VERSION KEHITTÄMISKOHEET	77
<b>10</b>	<b>OPPIMATERIAALIIN TEHDYT MUUTOKSET</b>	<b>82</b>
<b>11</b>	<b>POHDINTA</b>	<b>87</b>
11.1	POHDINTAA JA ARVIOINTIA TUTKIMUSPROSESSISTA	87
11.2	TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS JA EETTISYYS	91
11.3	JATKOTUTKIMUSMAHDOLLISUUKSIA	96
	<b>LÄHTEET</b>	<b>97</b>
	<b>LIITTEET</b>	<b>104</b>

# 1 JOHDANTO

Matematiikka on oppiaine, joka herättää ihmisissä monenlaisia tunteita. Toisaalta matematiikkaa arvostetaan, sillä sen osaaminen on tarpeellista tulevien opintojen, työelämän sekä arkipäiväisten tilanteiden kannalta. Kuitenkin matematiikka esiintyy usein inhottuna oppiaineena eikä sen osaaminen ole Suomessa enää niin korkealla tasolla kuin aikaisemmin, mikä on viime aikoina esiintynyt myös julkisessa keskustelussa (ks. esim. Saarikoski 2016). Kansainväliset tutkimukset ovat osoittaneet, että lasten ja nuorten matematiikan osaamisen taso on Suomessa laskussa. Vaikka tuoreen PISA-tutkimuksen (*Programme for International Student Assessment*) mukaan suomalaisten nuorten matematiikan osaaminen on edelleen kansainvälisesti verrattuna parhaimmistoa, ja osaamisen lasku on tasaantunut vuoden 2012 pudotuksen jälkeen, on trendi edelleen laskeva (Vettenranta ym. 2016, 28, 39). Lisäksi kansainvälisen vuonna 2015 toteutetun TIMSS-tutkimuksenkin (*Trends in Mathematics and Science Study*) mukaan suomalaisten neljäsluokkalaisten matematiikan osaaminen on edelleen hyvää tasoa verrattuna muihin osallistujamaihin, mutta kuitenkin laskenut vuonna 2011 toteutettuun tutkimukseen verrattuna. Nyt Suomea paremmin menestyi jopa 12 maata ja suomalaisten neljäsluokkalaisten pistemäärä oli laskenut 10 pistettä vuoteen 2011 verrattuna. Erityisesti sisältöalueittain tarkasteltuna tulokset heikentyivät eniten luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueella. (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro 2016, 26–28, 34–36.)

Suomalaisten oppilaiden matemaattisten taitojen heikentyminen on ollut nähtävillä jo aikaisemmissakin Suomessa toteutetuissa tutkimuksissa. Esimerkiksi Opetushallituksen seurantatutkimusten mukaan peruskoulunsa päättävien matemaattiset taidot ovat laskussa kaikilla matematiikan osa-alueilla (Rautopuro 2013, 118). Myös Hirvosen (2012, 111) mukaan matematiikan osaamisen taso on heikentynyt. Lisäksi oppilaiden asenteet matematiikkaa kohtaan ovat olleet negatiiviset. Vuoden 2011 TIMSS-tutkimuksen mukaan suomalaiset oppilaat pitivät matematiikasta hyvin vähän kansainvälisesti verrattuna, sillä lähes 60 % oppilaista sanoi pitävänsä matematiikasta vain vähän (Kupari, Vettenranta & Nissinen 2012, 31–32). Sama kehitys näyttää jatkuvan, sillä vuoden 2015 TIMSS-tutkimuksen mukaan jopa joka kolmas neljäsluokkalainen oppilas ei pidä matematiikasta (Vettenranta ym. 2016, 59). Matematiikan opetuksen ja siihen kohdistuvien huonojen asenteiden kehittämistarve on siis selvästi nähtävissä.

Vaikka selvää ja yksittäistä syytä matematiikan osaamisen tason laskuun ei varmastikaan pystytä osoittamaan, voidaan sitä pohtia matematiikan oppiaineen luonteen näkökulmasta. Nykyisen sosiokonstruktivistinen oppimiskäsityksen mukaan uusi tieto rakennetaan aina vanhan varaan (ks. esim. Kauppila 2007). Erityisesti matematiikka on oppiaineena kumulatiivinen, sillä uutta tietoa sisäistetään aina jo aiemmin ymmärretyn pohjalta. Perustan täytyy siis olla kunnossa, jotta voidaan oppia uutta. Perusta kaikelle matematiikan oppimiselle luodaan jo alkuopetuksessa, jossa opetellaan muun muassa luvun käsite, kymmenjärjestelmä sekä peruslaskutoimitukset eli yhteen-, vähennys- ja kertolasku sekä jakolasku, johon tosin alkuopetuksen aikana vasta tutustutaan. Jos nämä perusasiat jäävät oppilaalta ymmärtämättä ja peruslaskutoimitukset näyttäytyvät oppilaalle vain mekaanisina operaatioina, vaikuttanee se myös myöhempään matematiikan osaamiseen ja ymmärtämiseen.

Tällä tutkimuksella pyritään vahvistamaan matemaattisen osaamisen perustaa kertolaskun osalta, sillä sen on todettu olevan yksi matematiikan alkuopetuksen solmukohdista (Ikäheimo & Risku 2004, 229). Kertolasku on myös yksi näistä edellä mainituista peruslaskutoimituksista, ja tutkimuksessa keskitytään kertolaskun käsitteen sekä kertotaulujen oppimiseen ja opettamiseen peruskoulun toisella vuosiluokalla. Tutkimus toteutetaan kehittämistutkimuksena, jonka tavoitteena on kehittää pedagogisesti perusteltu ja monipuolinen kertolaskun käsitteen ymmärtämistä tukeva oppimateriaali kertolaskun ja kertotaulujen opetukseen. Oppimateriaalin kehittäminen toteutetaan iteratiivisesti eli kehitettyä oppimateriaalia testataan käytännössä ja kehitetään sen pohjalta vastaamaan vielä paremmin sille määriteltyjä tavoitteita. Tarkoituksena on kehittää kertolaskun käsitteen ymmärrystä korostava oppimateriaali, jotta kertolaskun käsitteelle saadaan rakennettua vankka perusta tulevaa matematiikan opiskelua varten.

Oppimateriaalin kehittäminen perustuu kielentämisen neljän kielen mallin käyttämiselle. Kielentämisellä tarkoitetaan oman ajattelun ilmaisua eri kielten avulla ja tämä neljän kielen malli koostuu matematiikan symbolikielestä, taktiilisesta toiminnan kielestä, kuviokielestä ja luonnollisesta kielestä. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 51–52.) Oppimateriaalia kehitetään siten, että sen tehtävissä ja harjoituksissa hyödynnetään matematiikan symbolikielen rinnalla konkreettisten toimintamateriaalien käyttöä, kuvioden piirtämistä ja luonnollisen kielen käyttöä mahdollisimman paljon. Ensinnäkin konkreettisten toimintamateriaalien ja toiminnallisuuden käyttö on tärkeää, sillä alkuopetuksen tehtävänä on niiden kautta luoda tukeva pohja matemaattiselle ajattelulle ja käsitteille (Ikäheimo & Risku 2004, 222). Toimintamateriaalien avulla opetus saadaan vietyä konkreettiselle tasolle, mikä on tarpeellista, sillä matemaattiset symbolit ovat abstraktioita, eikä alkuopetusikäisten oppilaiden ajattelu ole vielä sillä tasolla, että he pystyisivät toimimaan pelkästään niiden varassa (Piaget & Inhelder 1977, 126; Risku 2002, 115–116). Konkreettisten välineiden merkitys on todettu myös aiemmissa tutkimuksissa, sillä esimerkiksi vuosina 2005–2012 toteutetun perusopetuksen

matematiikan pitkittäisarvioinnin tulosten mukaan kahdesta samantasoisesta oppilaasta menestyy jatkossa todennäköisesti paremmin se, jonka tunneilla vuosiluokkien 1–2 aikana käytettiin useammin konkreettisia välineitä ja oppimateriaaleja (Metsämuuronen 2013a, 135). Kokemuksieni perusteella toimintamateriaalit eivät kuitenkaan ole matematiikan tunneilla niin tavanomaisia työvälineitä kuin niiden näiden edellä mainittujen perusteluiden perusteella kuuluisi olla.

Piirtäminen taas valittiin tutkimuksen oppimateriaaliin yhdeksi oppimisen välineeksi, sillä se on konkreettisten toimintamateriaalien jälkeen seuraava askel kohti abstraktimpaa ajattelua. Luonnollisen kielen käytön valinta oppimateriaalin yhdeksi lähtökohdaksi on perusteltua, sillä sen, että oppilaat selittävät ratkaisujaan toisilleen sekä neuvovat toisiaan, on todettu parantavan oppimistuloksia ja oppilaiden asenteita (ks. Hannula & Oksanen 2013, 289–290).

Lisäksi perusteluna edellä mainittuihin valintoihin on se, että keskustelu toimintamateriaalien, piirtämisen sekä luonnollisen kielen käytön merkityksestä matematiikan opetuksessa on ajankohtaista. Viime syksynä voimaan tulleet Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) ohjaavat yhä enemmän opetusta konkreettiselle tasolle ja korostavat, että matemaattista ajattelua tulisi ilmaista eri tavoin, kuten luonnollisen kielen, välineiden ja piirtämisen kautta (Opetushallitus 2014, 128–130). Eri kielten käytön korostuminen tämän tutkimuksen oppimateriaalissa täydentääkin jo olemassa olevia oppikirjoja, joissa niiden hyödyntäminen erityisesti kertolaskun kohdalla vaikuttaisi olevan hyvin vähäistä (ks. luku 5.3). Tämän tutkimuksen oppimateriaali on siis tarkoitettu käytettäväksi oppilaan oman oppikirjan rinnalla, jolloin kertolaskun opetus monipuolistuisi ja kertolaskua pystyttäisiin opetuksessa lähestymään monin eri tavoin. Lisäksi tämän tutkimuksen oppimateriaali hyödyntää Solmu-ohjelmana tunnetun pedagogisen lähestymistavan omia toimintavälineitä, lukumääräpaloja, joista ei aikaisemmin ole vielä ollut olemassa oppimateriaalia kertolaskuun liittyen.

Tutkimus jakaantuu yhteentoista eri lukuun. Johdannon jälkeen esittelen luvussa 2 tarkemmin kehittämistutkimusta ja kerron, miten menetelmä toteutuu tässä tutkimuksessa. Tutkimukseni teoreettinen ongelma-analyysi koostuu luvuista 3–5, joissa tarkastelen tutkimukseni taustalla vaikuttavia teoreettisia lähtökohtia. Luvussa 3 tarkastelen yleisellä tasolla suomalaisia matematiikan oppimateriaaleja sekä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita matematiikan osalta. Luvussa 4 esittelen kehittämäni oppimateriaalin taustalla vaikuttavat kaksi pedagogista lähestymistapaa, jotka ovat kielentäminen sekä Solmu-ohjelma. Luvussa 5 paneudun aiempaan tutkimuskirjallisuuteen kertolaskuun liittyen ja teen pienimuotoisen empiirisen ongelma-analyysin tarkastelemalla muutamia olemassa olevia matematiikan oppikirjoja kertolaskun osalta. Tämän ongelma-analyysin jälkeen luvussa 6 esittelen vielä tutkimuksen tavoitteet sekä tutkimuskysymykset, jonka jälkeen luvussa 7 kerron tarkemmin tutkimuksen etenemisestä sekä aineiston käsittelystä ja analysoinnista. Luvussa 8

esittelen kehittämäni oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämisprosessin. Ensin kuvailen oppimateriaalin suunnittelua, sen jälkeen esitän oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta yleisluontoisen kuvauksen. Viimeisenä alalukuna on oppimateriaalin arviointi, jossa tarkastelen oppimateriaalia keräämäni aineiston pohjalta. Luvussa 9 teen yhteenvetoa aineiston analyysin pohjalta tehdystä oppimateriaalin arvioinnista, peilaan näitä tuloksia teoriaan ja vastaan ensimmäiseen ja toiseen tutkimuskysymykseen. Lisäksi poimin tähän yhteenvetoon mukaan oppimateriaalille kohdistetut kehittämis ehdotukset. Luvussa 10 esittelen oppimateriaaliin tehdyt muutokset ja kokonaisuudessaan kehitetty oppimateriaali on esitetty liitteissä 3–7. Luvussa 11 pohdin vielä koko kehittämisprosessin onnistumista sekä tutkimuksen luotettavuutta sekä eettisyyttä ja teen ehdotuksia jatkotutkimukselle.

## 2 KEHITTÄMISTUTKIMUS

Tämä tutkimus toteutetaan kehittämistutkimuksena, joka on vielä melko uusi menetelmä opetuslallalla. Sen vuoksi sitä on tutkimusraportin alussa syytä esitellä hieman tarkemmin. Tässä luvussa esittelen, mitä kehittämistutkimuksella tarkoitetaan ja miten se toteutuu tässä tutkimuksessa. Luvussa 2.1. tuon esiin, mikä on kehittämistutkimuksen tarkoitus ja alkuperä. Lisäksi esittelen kehittämistutkimuksen rakennetta ja sitä, miten kehittämisprosessi tyypillisesti etenee. Lopuksi tuon esiin vielä kehittämistutkimuksen vahvuuksia ja heikkouksia. Luvussa 2.2 esittelen, miten kehittämistutkimus toteutuu tässä tutkimuksessa ja peilaan tämän tutkimuksen etenemistä kehittämistutkimuksen tyypillisiin vaiheisiin.

### *2.1 Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä*

Opetuksen tutkimusta on kritisoitu paljon siitä, ettei tutkimusten tuloksia ole saatu siirrettyä käytäntöön. Tutkimuksista saatu tieto ei yleensä ole tarpeeksi käytännönläheistä, minkä vuoksi siirtäminen on haastavaa. Kehittämistutkimus on tutkimusmenetelmä, joka on muotoutunut vastaamaan tähän haasteeseen. Sen tavoitteena on kehittää opetusta tutkimuspohjaisesti vastaamaan opetustilanteista nousseisiin tarpeisiin ja sen tarkoituksena on siten saada opetuksen tutkimus ja opetus lähemmäksi toisiaan. Kehittämistutkimus on kuitenkin vielä nuori tutkimusmenetelmä opetuslallalla, sillä alan ensimmäiset tutkimusartikkelit on julkaistu vasta 1990-luvun alussa. Menetelmän monien määritelmien lisäksi siitä on käytetty myös monia eri nimityksiä, kuten design experiment tai development research. Tällä hetkellä englanninkielisessä kirjallisuudessa termiksi on kuitenkin vakiintunut design-based research tai design research. (Juuti & Lavonen 2009, 157–158; Kiviniemi 2015, 220; Pernaa 2013, 10–11.) Suomenkielisessä kirjallisuudessa kehittämis-tutkimuksesta on käytetty lisäksi nimityksiä design-tutkimus ja suunnittelututkimus (Kiviniemi 2015, 220).

Kehittämistutkimuksella on juuret materiaalistien tuotteiden sekä rakennusten suunnittelun perinteessä ja sillä onkin vahva asema sekä tuotantotalouden että tietojärjestelmätieteen aloilla. Vasta myöhemmin kehittämistutkimusta on menetelmänä sovellettu myös sosiaalisten prosessien suunnittelussa ja kasvatusta ja opetuslallalla pedagogisten toimintamallien kehittälyssä. Täten



kasvatusalalla voidaankin puhua kasvatustieteellisestä kehittämis- tai suunnittelututkimuksesta, sillä sen pyrkimykset ovat mahdollisesti erilaisia verrattuna esimerkiksi tuotantotalouden alalla toteutettuihin kehittämistutkimuksiin. (Heikkinen 2015, 207–208; Kiviniemi 2015, 220–221.) Kasvatustieteen kentällä tämä uusi metodologinen lähestymistapa on esitelty vuonna 1992 (Barab 2006, 155). Suomalaiseen kasvatustieteelliseen tutkimukseen kehittämistutkimus tuli menetelmäksi vasta 2000-luvun puolella. Juutin ja Lavosen (2009, 158) mukaan kehittämistutkimus onkin yleistynyt erityisesti ainedidaktiikan alan tutkimuksissa ja Suomessa on 2000-luvun alkupuolella julkaistu esimerkiksi useita väitöskirjoja (ks. esim. Aksela 2005; Hassinen 2006; Juuti 2005; Leppäaho 2007), joissa on hyödynnetty kehittämistutkimusta didaktisen artefaktin suunnitteluun.

Nuorena tutkimusmenetelmänä kehittämistutkimus on vielä monitahoinen, joten on hankala esittää sille yksiselitteistä määritelmää tai kuvailla sen rakennetta yksikäsitteisesti. Edelson (2002, 108) on määritellyt kolme kysymystä, joihin kehittämistutkimuksessa on tarkoituksena löytää ratkaisut. Niitä ovat: 1) Miten kehittämisprosessi etenee? 2) Mitä tarpeita ja mahdollisuuksia tällaisella tutkimuksella on? 3) Millaiseen lopputuotokseen kehittäminen johtaa? Näihin kysymyksiin täytyy etsiä ratkaisut jokaisessa kehittämistutkimuksessa, vaikkei niitä välttämättä tarvitse muodollisesti kirjoittaa näkyväksi. Kysymysten pohjalta kehittämistutkimuksessa tehdään päätöksiä, jotka voidaan jakaa kolmeen eri kategoriaan, jotka määrittävät tutkimuksen lopputulosta. Niitä ovat kehittämisprosessi, ongelma-analyysi ja kehittämistuotos.

Edelsonia (2002) mukaillen myös Pernaa (2013) esittää kehittämistutkimuksen toteuttamisen etenevän kolmessa eri vaiheessa, joista ensimmäinen on ongelma-analyysi. Sen avulla selvitetään kehittämisen tarpeet. Kehittäminen lähtee siis liikkeelle aidosta, koetusta ongelmasta, johon aletaan etsiä ratkaisua. Ongelman noustua esiin tutustutaan aikaisempaan tutkimuskirjallisuuteen ja hankitaan empiiristä tietoa esimerkiksi kyselyn avulla siitä, mihin tarpeisiin kehittämisellä pyritään vastaamaan. Ongelma-analyysin jälkeen seuraavana vaiheena on käytännön toteutus eli kehittämisprosessi, joka koostuu kehittämissykleistä. Yksi kehittämissykli koostuu kehittämis-, arviointi- ja raportointivaiheista, joiden pohjalta tuotosta kehitetään, arvioidaan ja taas kehitetään uudelleen. Eli kun ongelma-analyysi on tehty, laaditaan sen pohjalta artefaktista ensimmäinen versio. Kun versio on valmis, arvioidaan se esimerkiksi testaamalla sitä käytännössä. Tämän jälkeen sitä kehitetään edelleen, arvioidaan uudelleen testaamalla ja jälleen kehitetään. Artefaktia kehitetään siis iteratiivisesti kohti sille asetettuja tavoitteita. Näitä kuvattuja kehittämissyklejä voi toteuttaa tutkimuksessa pienessä tai suuressa mittakaavassa sen tavoitteiden mukaisesti. Lopulta prosessi päättyy viimeiseen vaiheeseen eli valmiiseen kehittämistuotokseen. (Pernaa 2013, 17–19.)

Edelsonin (2002) mukaan vaikka nämä kolme vaihetta vaikuttavat selkeiltä, toisistaan erillisiltä ja ne näyttäisivät seuraavan toisiaan juuri tässä järjestyksessä tutkimuksen edetessä, ei asia kuitenkaan

välttämättä ole niin käytännössä. Esimerkiksi koko kehittämisprosessi voi olla niin laaja ja dynaaminen, että sen kuvaileminen voi olla mahdotonta ennen koko prosessin päättymistä. Ongelmanalyysin ei myöskään tarvitse olla täysin valmis ennen kehittämistuotosta, vaikka ideaalitilanteessa niin olisikin. Käytännössä ne voivat kuitenkin kulkea käsi kädessä koko tutkimusprosessin aikana. (Edelson 2002, 108–110.)

Juuti ja Lavonen (2009) ovat esittäneet menetelmälle kolme tyypillistä piirrettä ja kuvailevat kehittämistutkimusta erityisesti opetuksen tutkimuksen näkökulmasta. Ensinnäkin kehittämistutkimuksessa tavoitteena on kehittää artefakti, joka on tarkoitettu otettavaksi käyttöön opetuksessa. Artefaktin tarkoituksena on auttaa opettajaa toimimaan opetuksessa niin, että oppilaat oppivat paremmin. Kehiteltävä didaktinen artefakti voi olla esimerkiksi verkkoon kehitetty oppimisympäristö. Toinen piirre taas on se, että tutkimuksessa tapahtuva kehittämisprosessi on iteratiivinen, eli prosessi etenee kehittämis- ja testaamissykleissä. Kehitettyä artefaktia siis aina testataan ja sen pohjalta kehitetään edelleen. Kolmas piirre on se, että prosessin aikana saadaan artefaktin testaamisen myötä uutta tietoa opetus-opiskelu-oppimisprosessista. (Juuti & Lavonen 2009, 157, 166–168.)

Kehittämistutkimuksella on useita samankaltaisia piirteitä toimintatutkimuksen kanssa, ja esimerkiksi Heikkinen, Kontinen ja Häkkinen (2007, 67–74) näkevätkin kehittämistutkimuksen yhtenä toimintatutkimuksen eri suuntauksista. Useat muutkin tutkijat ovat esitelleet kehittämistutkimuksen ja toimintatutkimuksen yhtäläisyyksiä, joita ovat esimerkiksi tutkimuksellinen käytäntöjen kehittäminen, toteutuksen syklinen luonne sekä teorian ja empirian vastavuoroisuus. Toisaalta on esitetty myös näkemyksiä, joiden mukaan ne ovat tutkimusotteina aivan erilaisia ja yhtäläisyyksiä voikin pitää vain näennäisinä. Tämän näkemyksen mukaan menetelmien ero voidaan nähdä jo niiden taustoissa, sillä toimintatutkimus on kehittynyt yhteiskuntatieteellisen tutkimuksen yhteydessä, kun taas kehittämistutkimus on peräisin matemaattis-luonnontieteellisen tutkimuksen tutkimusperinteestä. (Kiviniemi 2015, 221–222.) Joidenkin näkemysten mukaan kehittämistutkimus ja toimintatutkimus eroavat myös siinä, että toimintatutkimus kehittää paikallisesti toimivia ratkaisuja, kun taas kehittämistutkimus pyrkii laajempaan yleistämiseen (Anderson & Shattuck 2012, 17; Barab & Squire 2004, 5–6). Heikkisen ja kollegoiden (2007, 68–69) mukaan tutkimusmenetelmien ero on kuitenkin siinä, että kehittämistutkimuksessa on tarkoituksena saada aikaan konkreettinen, toimiva tuotos, kun toimintatutkimuksessa taas keskitytään lähinnä yhteisön sosiaalisiin prosesseihin. Kun kehittämistutkimuksessa keskitytään suunnittelutyöhön, toimintatutkimuksessa painotetaan toiminnan syklisyyttä sekä reflektointia ja arviointia.

Kehittämistutkimuksen selvimpänä vahvuutena on, että se tuo tutkimuksen ja käytännön lähemmäksi toisiaan. Kun opetuksellisen kehittämistutkimuksen tavoitteena on kehittää jokin opetukseen liittyvä artefakti, kuten oppimateriaali, ovat tutkimuksen tulokset jo lähtökohtaisesti siirrettävissä suoraan käytäntöön, eikä tutkimustieto jää vain teoreettiselle tasolle. Opetuksen tutkijat ja harjoittajat myöntävätkin, että opetukseen liittyvät tutkimukset on liian usein erotettu jokapäiväisistä käytännön ongelmista ja kysymyksistä (Design-based Research Collective 2003, 5). Yksi syy siihen, miksi kasvatustieteellinen kehittämistutkimus on ylipäättään muotoutunut, on se, että yksilön kognitiivisia prosesseja ei voi tutkia erotettuna ympäristöstä, jossa prosessi tapahtuu (Barab 2006, 155–156). Kehittämistutkimuksessahan tutkimusta tehdään nimenomaan luonnollisessa ympäristössä, sillä jos on kyse esimerkiksi oppimisympäristön kehittämisestä, havainnointit ja tuotoksen testaaminen toteutetaan oikeiden oppimistilanteiden aikana. Siten tutkimusta tehdään aidoissa olosuhteissa, mikä parantaa tutkimuksen luotettavuutta ja pätevyyttä.

Kehittämistutkimusta on kuitenkin kritisoitu tutkimuskirjallisuudessa paljon ja erityisesti kritiikki on kohdistunut sen luotettavuuteen. Yhtenäisten tutkimuskäytäntöjen puuttuminen on yksi kritiikin kohde kehittämistutkimusmenetelmälle. Lisäksi aineiston suuri määrä aiheuttaa haasteita objektiivisen ja puolueettoman analyysin kannalta. Myös kehittämistutkimukselle tyypillisen laajan ja pitkän tutkimusprojektin hallitseminen voi osoittautua haastavaksi tehtäväksi. (Dede 2004; Pernaa 2013, 18–21.)

Kehittämistutkimusta on kritisoitu myös siitä, että tyypillisesti se toteutetaan kvalitatiivisena pienellä otoskoollla, jolloin yleistysten tekeminen ei ole mahdollista, sillä se ei kuvaa perusjoukkoa niin hyvin kuin tieteelliseltä tutkimukselta odotetaan. Luotettavuuden kannalta kehittämistutkimuksen vahvuudeksi nousee kuitenkin se, että siinä on mahdollista käyttää sekä kvalitatiivisia että kvantitatiivisia menetelmiä samaan aikaan, jolloin tutkimuskohteesta saadaan muodostettua kokonaisvaltaisempi kuva. Se toisaalta mahdollistaa myös vähän laajempien yleistysten tekemisen. Lisäksi kehittämissyklien määrällä voidaan parantaa tutkimuksen luotettavuutta. (Pernaa 2013, 20–21.) Edelsonin (2002, 117–118) mukaan kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointia ei tulisi edes verrata perinteisen empiirisen tutkimuksen käytäntöihin, vaan sitä tulisi arvioida eri lähtökohdista käsin. Hänen mukaansa kaksi hyvää arviointikriteeriä kehittämistutkimukselle ovat, miten uudenlainen tuotos on saatu kehitettyä ja miten hyödyllinen se on käytännössä.

## *2.2 Kehittämistutkimuksen toteutuminen tässä tutkimuksessa*

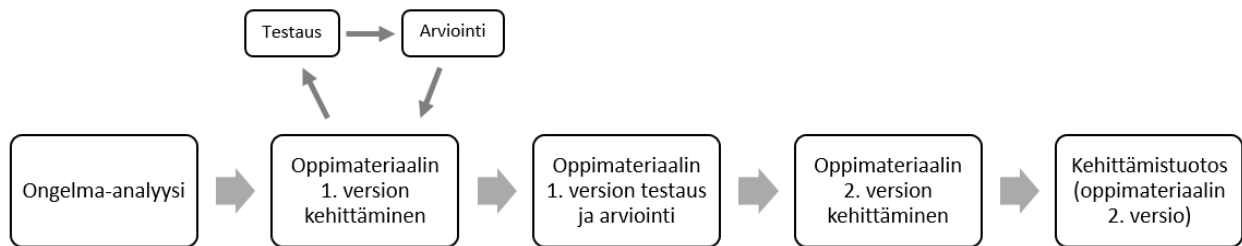
Tässä tutkimuksessa tavoitteena on kehittää oppimateriaalia toiselle luokalle kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen 1–5 ja 10 oppimiseen. Tutkimus lähtee liikkeelle kehittämistutkimukselle

tyypilliseen tapaan ongelma-analyysillä. Tässä tutkimuksessa ongelma-analyysi koostuu tutkimuksen teoriaosuudesta, jossa perehdytään aiempaan tutkimuskirjallisuuteen matematiikan oppimateriaaleista, uusiin Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin (2014), kielentämiseen ja Solmu-ohjelmaan pedagogisina toimintamalleina sekä aiempaan tutkimuskirjallisuuteen kertolaskusta ja sen opettamisesta (ks. luvut 3–5). Tutkimuksessa toteutetaan siis teoreettinen ongelma-analyysi, jonka pohjalta oppimateriaali kehitetään. Aiempi tieto matematiikan oppimateriaaleista sekä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet antavat kehittämiselle raamit, ja aiempi tutkimuskirjallisuus kertolaskusta ja sen opettamisesta taas lisää ymmärrystä aiheesta sekä tuo esiin jo aiemmin ilmentyneitä ongelmakohtia, joihin kehitettävässä oppimateriaalissa on hyvä kiinnittää huomiota. Kielentäminen ja Solmu-ohjelma taas toimivat pedagogisina malleina, joiden mukaisesti oppimateriaali pyritään kehittämään. Nämä toimintamallit ovat valikoituneet kehittämisen taustalle Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 perusteella, sillä siellä ohjeistetaan toteuttamaan opetusta samankaltaisten periaatteiden mukaisesti kuin näissä pedagogisissa toimintamalleissa. Lisäksi ongelma-analyysin lopuksi teoreettisen osuuden jälkeen tutkimuksessa on toteutettu pienimuotoinen empiirinen ongelma-analyysi, jossa tarkasteltiin olemassa olevia matematiikan oppikirjoja kertolaskun osalta. Tämän pienimuotoisen oppikirjakatsauksen löydökset ovat nähtävillä luvussa 5.3.

Kehittämisen prosessin vaiheessa tutkimuksessa kehitettävän oppimateriaalin muotoutuminen tapahtuu rinnakkain sen testaamisen ja arvioinnin kanssa, sillä oppimateriaali ei ollut vielä kokonaisuudessaan valmis ennen testausjakson alkua. Täten oppimateriaalia kehitettiin koko prosessin ajan iteratiivisesti vastaamaan yhä paremmin oppilaiden sen hetkisiä tarpeita. Voisi siis sanoa, että yhden ison kehittämissyklin sisällä tehtiin monia hyvin pieniä kehittämissyklejä, kun aina edellisen oppitunnin havainnot tehtäviin ja opetukseen liittyen otettiin huomioon seuraavien tehtävien ja opetustuokioiden suunnittelussa. Kokonaisuudessaan kehitettävän oppimateriaalin ensimmäinen versio valmistui vasta testausjakson päätyttyä ja samalla testausjakson aikana oli jo saatu kerättyä kaikki mahdollinen aineisto koko oppimateriaalikokonaisuuden arviointia varten. Aineistosta ja sen analysoinnista on kerrottu tarkemmin luvussa 7.2.

Oppimateriaalin ensimmäisen version arvioinnin perusteella materiaalista etsitään kehityskohteita, joita pyritään muuttamaan paremmiksi teoriaan ja testausjakson kokemuksiin nojaten. Lopulta kehittämiskohteita muuttamalla oppimateriaalista kehitetään vielä toinen, paranneltu versio, joka on tutkimuksen lopullinen kehittämistuotos. Kuviossa 1 havainnollistetaan vielä tutkimuksen kulkua. Siinä pyritään tuomaan esiin se, miten oppimateriaalin ensimmäisen version kehittäminen muodostui sykliseksi prosessiksi, jossa materiaalia päästiin aina heti kehittämisen jälkeen testaamaan ja arvioimaan pienessä mittakaavassa siten, että arviointi otettiin huomioon aina

seuraavan tunnin materiaalia kehittäessä. Koko oppimateriaalikokonaisuuden lopullinen arviointi toteutettiin kuitenkin testauksen jälkeen ja tämän arvioinnin pohjalta kehitettiin materiaalista toinen versio.



**KUVIO 1.** Tutkimuksen kulku yleisiä kehittämistutkimuksen vaiheita mukaillen

# 3 MATEMATIIKAN OPETUS PERUSOPETUKSEN OPPIMATERIAALIEN JA OPETUSSUUNNITELMAN NÄKÖKULMISTA

Tämä luku on ensimmäinen osa oppimateriaalin kehittämisprosessin taustalla olevaa ongelma-analyysia. Luku jakaantuu kahteen osaan, joista ensimmäisessä (luku 3.1) tarkastelen matematiikan oppimateriaaleja sekä niiden roolia suomalaisessa matematiikan opetuksessa. Erityisesti tarkastelun kohteena ovat matematiikan oppikirjat, joiden sisältöä tarkastelen matemaattisen osaamisen eri ulottuvuuksien näkökulmasta. Tämä tarkastelu taustoittaa matematiikan oppikirjojen roolia opetuksessa sekä sisällön laatua, mikä antaa pohjan uuden oppimateriaalin kehittämiseksi. Luvun toisessa osassa (luku 3.2) tarkastelen Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita 2014 matematiikan opetuksen osalta. Erityisesti tarkastelen vuosiluokkien 1–2 osuutta, sillä tämä tutkimus keskittyy toisen vuosiluokan matematiikan opetukseen. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet antavat raamit uuden oppimateriaalin kehittämiseksi ja antavat perustelun myös sille, mitkä pedagogiset lähestymistavat oppimateriaalin kehittämisen taustalle on tässä tutkimuksessa valittu.

## *3.1 Oppimateriaalit matematiikan opetuksessa*

Heinosen (2005, 30) mukaan oppimateriaalista on käytetty monenlaisia eri määritelmiä ja oppimateriaaleja on ryhmitelty muun muassa sen perusteella, onko kyseessä kirjallinen tai visuaalinen oppimateriaali. Hänen käyttämänsä määritelmän mukaan oppimateriaalilla tarkoitetaan oppikirjaa, tehtäväkirjaa, opettajan materiaalia tai muuta oheismateriaalia, joka voi olla esimerkiksi videoita tai verkkopohjaisia oppimisympäristöjä. Pääpiirteenä oppimateriaalille kuitenkin on se, että se sisältää oppiainesta ja on tehty opetustarkoituksiin. (emt., 30.) Tässä tutkimuksessa kehitettävä oppimateriaali ei varsinaisesti ole oppi- tai tehtäväkirja, vaan se koostuu oppilaille tarkoitetuista tehtävämonisteista sekä opettajan materiaalista, joka sisältää opettajan oppaan tapaan opetustuokioihin tarkoitettuja ohjeita sekä ohjeistuksia oppilaiden kanssa tehtäviin toimintamateriaaleja hyödyntäviin harjoituksiin. Näin ollen tässä tutkimuksessa oppimateriaali

määrittellään hieman laajemmin Heinosta (2005) mukaillen oppilaalle ja opettajalle tarkoitetuksi materiaaliksi, joka sisältää oppiainesta ja joka on tehty opetustarkoituksiin.

Useiden tutkimusten mukaan matematiikan oppimateriaaleista oppikirjalla sekä opettajan oppaalla on keskeinen rooli matematiikan opetuksessa (ks. esim. Perkkilä 2002, Törnroos 2004, Joutsenlahti & Vainionpää 2010), ja suomalainen matematiikan opetus onkin monesti todettu oppikirjasidonnaiseksi (ks. esim. Pehkonen & Rossi 2007, 143–144; Pehkonen & Krzywacki-Vainio 2007, 158; Perkkilä & Lehtelä 2007, 74). Perkkilän (2002, 152) matematiikan alkuopetusta koskevassa tutkimuksessa, jossa hän tutki matematiikan oppikirjan ja opettajan oppaan asemaa opetuksen suunnittelussa ja opetuksessa, oppikirjan asema oli niin vahva, että se määräsi jopa opetettavat sisällöt ja opetuksessa käytettävät aktiviteetit. Tutkimuksessa havainnoiduilla oppitunneilla oppikirjaa käytettiin lähes joka tunti ja muihin oppimateriaaleihin nähden sen asema oli ylivoimainen. Oppikirja näyttäytyikin toimivan alkuopetuksessa jopa toteutuvana opetussuunnitelmana, eivätkä tutkimukseen osallistuneet opettajat kyseenalaistaneet asiasisältöjä tai etenemisjärjestystä, jotka oppikirjat ja opettajan oppaat tarjosivat (Perkkilä 2002, 155–156).

Koska oppikirja näyttää olevan matematiikan opetuksessa tärkein oppimateriaali, on hyvä kiinnittää huomiota siihen, millaisia matematiikan oppikirjat tyypillisesti ovat sisällöltään. Törnroosin (2004, 34–35) mukaan matematiikan oppikirjat koostuvat suurilta osin mekaanisista peruslaskutoimitustehtävistä. Myös Joutsenlahti ja Vainionpää (2007) ovat tulleet Matematiikan Oppimateriaalin Tutkimuksen projektissaan (MOT-projekti) samankaltaisiin tuloksiin. He tarkastelevat matematiikan oppimateriaaleja siitä näkökulmasta, miten oppimateriaalit tukevat oppilaan matemaattisen osaamisen (*mathematical proficiency*) kehittymistä. (Joutsenlahti & Vainionpää 2007, 185–189.)

Matemaattinen osaaminen on Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001, 116) mukaan käsite, jossa voidaan erottaa viisi matemaattisen osaamisen piirrettä. Ne ovat: 1) käsitteellinen ymmärtäminen, 2) proseduraalinen sujuvuus, 3) strateginen kompetenssi, 4) mukautuva päättely ja 5) yritteliäisyys. Piirteet eivät kuitenkaan esiinny toisistaan irrallisina vaan erilaisina ulottuvuuksina moninaisessa kokonaisuudessa. Käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja suhteiden ymmärtämistä eli yhtenäistä ja toimivaa ymmärrystä matemaattisista ideoista. Käsitteellistä ymmärrystä omaavilla oppilailla matemaattinen tieto on järjestäytynyt yhtenäiseksi kokonaisuudeksi, mikä mahdollistaa uusien asioiden oppimisen ja yhdistämisen jo opittuihin asioihin. Proseduraalisella sujuvuudella tarkoitetaan ymmärrystä proseduureista ja taitoa käyttää niitä joustavasti, tarkoituksenmukaisesti, virheettömästi ja tehokkaasti. Strategisella kompetenssilla taas tarkoitetaan kykyä muodostaa, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Neljäs piirre eli mukautuva päättely tarkoittaa kykyä ajatella loogisesti

tilanteiden mukaan. Lisäksi se viittaa kykyyn reflektoida, selittää ja todistaa asioita. Viimeisellä yritteliäisyyden piirteellä taas viitataan kykyyn nähdä matematiikka merkityksellisenä ja hyödyllisenä sekä taipumukseen nähdä itsensä tehokkaana matematiikan oppijana ja harjoittajana. (Kilpatrick ym. 2001, 116–133.)

Näihin piirteisiin peilattuna matematiikan oppimateriaaleissa painottuu proseduraalinen sujuvuus, sillä suurin osa oppilaan kirjan tehtävistä on tarkoitettu proseduraalisen sujuvuuden kehittämiseen. Vaikka proseduraalisen sujuvuuden harjoittaminen tukeekin käsitteellisen ymmärtämisen kehittymistä, jää käsitteiden tarkastelu teoreettisella tasolla oppilaan kirjoissa hyvin vähälle. Näin käsitteellisen ymmärtämisen kehittyminen jääkin lähes kokonaan opettajan pitämien opetustuokioiden ja oppikirjan ulkopuolisten harjoitusten vastuulle. Myös strategista kompetenssia ja mukautuvaa päättelyä harjoituttavia tehtäviä on vähemmän ja ne esiintyvät yleensä opettajan oppaissa tai eriyttävissä lisämateriaaleissa. (Joutsenlahti & Vainionpää 2007, 188–190.) Viides piirre eli yritteliäisyys on Joutsenlahden ja Vainionpään (2007, 188, 190) ohjaamassa projektissa korvattu piirteellä matematiikkakuva ja se näkyy oppimateriaaleissa muun muassa myönteistä minäkuvaava matematiikan osaajana kehittävässä tehtävässä sekä siinä, että oppimateriaalit pyrkivät tehtävillään osoittamaan matematiikan merkityksen yhteiskunnassa.

Yhteenvetona matematiikan oppimateriaaleista Suomessa voidaan siis todeta, että oppilaan kirjat keskittyvät tyypillisesti peruslaskutaitoja kehittäviin tehtäviin. Muut materiaalit, kuten haastavammat ja soveltamista vaativammat tehtävät esiintyvät yleensä opettajan oppaissa tai muissa lisämateriaaleissa. Koska suomalainen matematiikan opetus on kuitenkin usein todettu hyvin oppikirjasidonnaiseksi, näyttää siltä, että opetuksessa korostuu erityisesti peruslaskutaitojen harjoittaminen, sillä oppikirjoja tarkastelluissa edellä mainituissa tutkimuksissa sen osuus oli niissä suurin.

### *3.2 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 matematiikan opetuksen ohjaajana*

Tutkimuksen taustalla vaikuttavat vuonna 2014 julkaistut Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, jotka on otettu kouluissa käyttöön vuoden 2016 syksyllä. Perusteiden oppimiskäsitys ohjaa sosiokonstruktiivisen näkemyksen mukaiseen oppimiseen. Opetussuunnitelmassa esiintyvän oppimiskäsityksen mukaan oppilas on aktiivinen toimija, joka oppii ratkaisemaan ongelmia sekä itsenäisesti että yhdessä toisten oppilaiden kanssa. Sen mukaan oppiminen tapahtuu vuorovaikutuksessa muiden kanssa ja lisäksi oppilaat ohjataan liittämään opittavat käsitteet ja asiat



jo aiemmin opittuun, jotta ymmärrys voi syventyä. Nämä kaikki piirteet ovat ominaisia myös sosiokonstruktiviselle oppimiskäsitykselle. (Kauppila 2007, 113; Opetushallitus 2014, 17.)

Matematiikan osalta Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) ohjaavat opetusta ensimmäisellä ja toisella vuosiluokalla entistä enemmän konkreettisuuteen ja toiminnallisuuteen. Ne antavat myös suoria ohjeita siitä, miten opetusta tulisi toteuttaa. Aikaisemmassa opetussuunnitelmassa esimerkiksi sisällöt oli pelkästään lueteltu, mutta nykyisissä opetussuunnitelman perusteissa on kerrottu myös, millä tavalla näitä sisältöjä tulisi opettaa. Esimerkiksi kertolaskun käsite on ohjeistettu opettamaan konkretian kautta. Lisäksi uusissa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa mainitaan leikit ja pelit yhtenä tärkeänä työtapana. Aikaisemmassa opetussuunnitelmassa (2004) niitä ei mainittu lainkaan. (Opetushallitus 2004, 158–160; Opetushallitus 2014, 128–130.)

Koska tässä tutkimuksessa kehitetään oppimateriaalia toisen vuosiluokan oppilaille, on syytä tarkastella Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita vuosiluokkien 1–2 osalta. Sen mukaan käsitteiden ja rakenteiden muodostaminen aloitetaan vuosiluokilla 1–2 monipuolisten kokemusten avulla. Näitä kokemuksia tulee tarjota opetuksessa hyödyntäen eri aisteja ja käyttäen erilaisia työtapoja ja välineitä. Tavoitteena on mahdollistaa oppimisympäristö, jossa voidaan opiskella toiminnallisesti sekä välineiden avulla. Lisäksi oppilaat tulisi totuttaa työskentelemään sekä itsenäisesti että yhdessä muiden oppilaiden kanssa. (Opetushallitus 2014, 128–130.) Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) nähdään siis selvästi samoja piirteitä kuin kielentämisessä (ks. luku 4.1).

Kielentämisen perusajatus eri ilmaisutapojen käytöstä mainitaan Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) moneenkin otteeseen. Ensinnäkin opetuksen tulisi vuosiluokilla 1–2 kehittää oppilaan taitoa ilmaista matemaattista ajatteluaan eri tavoin. Näitä tapoja ovat suullinen ja kirjallinen ilmaisu, piirtäminen ja kuvien tulkitseminen sekä ajattelun ilmaisu konkreettisten välineiden avulla. (Joutsenlahti & Kulju 2016, 31; Opetushallitus 2014, 128.) Juuri nämä ovat matematiikan symbolikielen lisäksi ne kielet, jotka muodostavat kielentämisen neljä eri ulottuvuutta (ks. luku 4.1). Näiden kielten käyttöön kannustaminen on opetussuunnitelmassa nähtävissä myös opetuksen tavoitteiden kohdalla vuosiluokilla 1–2. Opetuksen lisäksi kielentämisen merkitys nähdään myös arvioinnissa. Puhe, kirjallinen työskentely, välineet ja piirtäminen nähdään myös välineinä, joiden avulla voidaan selvittää oppilaiden osaamisen taso. Oppilailla tulee siis olla tilaisuus näyttää osaamisensa eri tavoin. (Opetushallitus 2014, 130.)

Tämä tutkimus keskittyy kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen opetukseen. Se on myös yksi Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueen kohdista. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet antavat melko tarkat ohjeet siitä, mitä asioita

kertolaskusta tulisi toisen vuosiluokan aikana opettaa, ja millä tavalla niiden opetus tulisi toteuttaa. Kertolaskun käsite tulisi opettaa konkretian avulla ja kertotauluista tulisi opetella kertotaulut 1–5 sekä 10. Oppilaat tulisi opettaa myös hyödyntämään kertolaskun vaihdannaisuutta. Lisäksi täytyy luoda pohja jakolaskun ymmärtämiselle sekä sen ja kertolaskun yhteyden käsittämiseksi. (Opetushallitus 2014, 129.)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ohjaavat myös, että matematiikan opetuksen tulisi tukea oppilaiden positiivista asennetta matematiikkaa kohtaan. Lisäksi sen tulisi tukea oppilaiden myönteistä minäkuvaa matematiikan oppijoina. Jotta asenteet kehittyisivät tähän suuntaan, täytyy niiden tukemisesta huolehtia jo alkuopetuksesta lähtien. (Opetushallitus 2014, 128.)

Yhteenvetona Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista matematiikan osa-alueella voidaan siis todeta, että se ohjaa monipuolisuuteen matematiikan opiskelussa. Opetussuunnitelman perusteella matematiikan opiskelun ei tulisi olla oppikirjasidonnaista, kuten se vielä usein näyttäytyy (ks. luku 3.1), vaan opetuksessa tulisi hyödyntää eri tapoja ilmaista matemaattista ajattelua sekä käyttää erilaisia työtapoja ja välineitä. Erityisesti kielentäminen eli matemaattisen ajattelun ilmaiseminen eri kielten avulla (ks. luku 4.1) korostuu Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa sekä opetuksen että arvioinnin alueilla.

# 4 KIELENTÄMINEN JA SOLMU-OHJELMA PEDAGOGISINA LÄHESTYMISTAPOINA MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Tässä luvussa esittelen kehitettävän oppimateriaalin taustalle valitut kaksi pedagogista lähestymistapaa eli kielentämisen sekä Solmu-ohjelman. Luvussa 4.1 käsittelen kielentämistä. Ensin esittelen mitä kielentämisellä tarkoitetaan ja mitä hyötyä sen käytöstä on matematiikan opetuksessa. Sen jälkeen esittelen kielentämisen neljän kielen mallin siitä, millä eri kielillä matemaattista ajattelua voidaan ilmaista. Lopuksi tarkastelen vielä koodinvaihtoa eri kielten välillä ja sen kahta erilaista käyttötapaa. Koska kielentämisen lisäksi oppimateriaalin tehtävissä käytetään erityisinä toimintavälineinä Solmu-ohjelman lukumääräpaloja, on syytä tarkastella myös hieman Solmu-ohjelmaa. Luvussa 4.2 esittelenkin, mitä Solmu-ohjelmalla tarkoitetaan, mitkä tekijät vaikuttavat sen taustalla ja millaiset siihen kuuluvat toimintavälineet eli lukumääräpalat ovat. Lopuksi tarkastelen myös hieman, miten Solmu-ohjelma ja sen toimintavälineet erityisesti tukevat kertolaskuun liittyvää multiplikatiivista ajattelua.

## 4.1 Kielentäminen matematiikan opetuksessa

Kielentäminen eli *linguaging* on käsitteenä esiintynyt kansainvälisissä matematiikan didaktiikan tutkimuksissa 1990-luvulta lähtien ja suomalaisessa ainedidaktiikan tutkimuskirjallisuudessa se on esitetty ensimmäisen kerran 2000-luvun alussa (Joutsenlahti & Kulju 2015, 58–59). Kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista erilaisten kielten avulla. Se voi olla joko suullista kerrontaa siitä, mitä on laskiessaan ajatellut tai kirjallista ilmaisua, joka tapahtuu kirjoittaen ja piirtäen. Matemaattisella ajattelulla taas tarkoitetaan matemaattisen tiedon käsittelyä, ja sen ilmaisu tapahtuu yleensä matematiikan symbolikielen kautta. (Joutsenlahti 2003, 192.) Lemke (2002) on esittänyt, että matematiikkaa voidaan tarkastella vain multisemioottisena systeeminä, johon symbolikielen lisäksi kuuluu myös luonnollinen kieli sekä visuaaliset esitykset. Hänen mukaansa ei ole mahdollista luoda matemaattisille asioille kunnollisia merkityksiä pelkästään sanallisten ilmausten, matemaattisten ilmausten tai visuaalisten esitysten avulla, vaan vain nämä kaikki

yhdistämällä voidaan muodostaa oikeita merkityksiä. Joutsenlahti ja Kulju (2010b, 78) ovatkin esittäneet kolmen kielen mallin matemaattisen ajattelun ilmaisutavoista, joiksi he esittävät matematiikan symbolikielen, luonnollisen kielen ja kuviokielen. Näiden rinnalle Joutsenlahti ja Rättyä (2015, 51–52) ovat eritelleet vielä neljännen, taktiilisen toiminnan kielen, jossa ilmaisu tapahtuu käsien välityksellä toimintamateriaalien avulla.

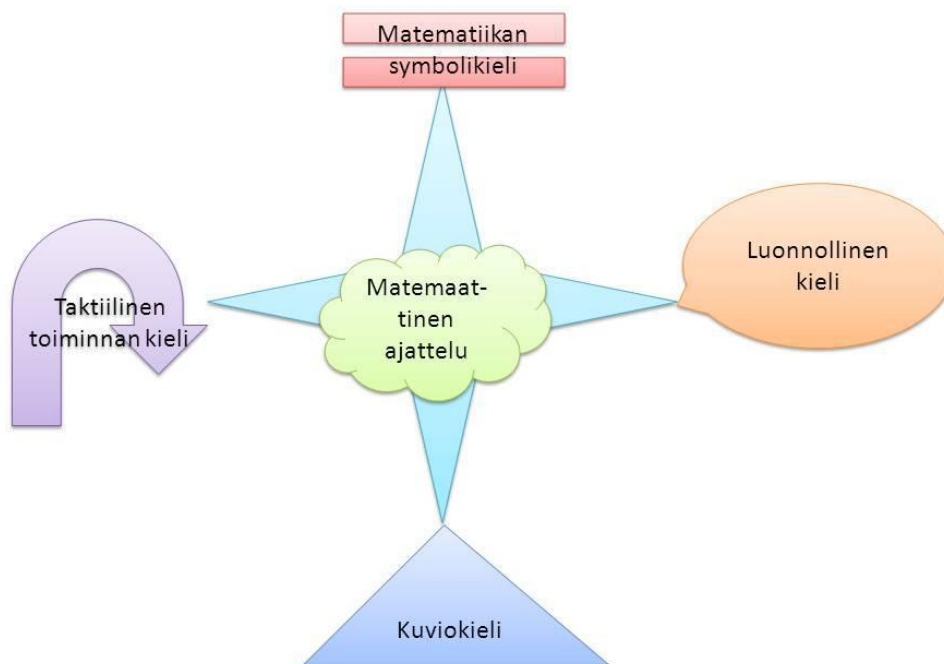
Puheen ja kirjoitetun kielen käyttö voidaan nähdä matematiikan opiskelussa erittäin tärkeänä, sillä ajattelu ja kieli eivät ole erotettavissa toisistaan. Kun ajatus muutetaan puheeksi, se jäsentyy ja rakentuu uudelleen. Toisaalta taas sanat muuttuvat jälleen ajatuksiksi, joten ajattelu ja kieli ovat jatkuvassa vuorovaikutuksessa keskenään. (Vygotski 1982, 214–215.) Kielentäessään ajatuksiaan oppilas siis samalla käsittelee omaa ajatteluaan ja jäsentää sitä rakentaen käsitteille merkityksiä (Chapin, O'Connor & Anderson 2003, 7; Joutsenlahti 2003, 192). Kieli tulisikin nähdä välineenä ajattelulle ja tiedon rakentamiselle eikä vain tiedon esittämiseksi ja kommunikoinnille (Schleppegrell 2010, 76). Suullinen kielentäminen oppilastovereille auttaa myös toisia oppilaita. Oppilaat voivat tällä tavoin verrata omaa ajatteluaan toisen ajatteluprosesseihin, mikä voi johtaa oman ajattelun korjaamiseen tai toisen ajattelutavan kyseenalaistamiseen. Oppilaiden tapa puhua saattaa myös erota opettajan tavasta, joten oppilaiden voi joskus olla helpompi ymmärtää vertaistaan. Kielentämisen myötä tapahtuva vuorovaikutus on siis merkittävää oppimisen kannalta. (Joutsenlahti 2003, 192–193; Joutsenlahti & Kulju 2010a, 54.)

Opettajan näkökulmasta kielentämisen hyödyllisyys voidaan nähdä myös oppimisen arvioinnin kannalta. Kun oppilas kielentää ajatteluaan joko suullisesti tai kirjallisesti paperille, opettaja näkee, miten oppilas on asian ymmärtänyt. Pelkkä matematiikan symbolien kirjoittaminen peräkkäin ei nimittäin vielä kerro paljoakaan oppilaan ajatteluprosessista. Kun opettaja pääsee kielentämisen kautta lähemmäs oppilaan ajattelua, on hänen helpompi arvioida oppilaan osaamista ja siten antaa oikeanlaista opetusta ja tukea tarvittaessa. (Joutsenlahti 2003, 192–194.)

Jotta kielentämisestä saadaan oppilaalle hyvä työväline myös tulevia opintoja varten, täytyy sen harjoittelu aloittaa jo peruskoulussa mahdollisimman varhain. Näin siitä tulee oppilaalle luonnollinen työväline, joka helpottaa opiskelua vielä myöhemminkin. (Joutsenlahti 2003, 194; Joutsenlahti & Rättyä 2015, 56.) Kielentämisen hyödyllisyys ei siis rajoitu vain tehtävien ratkaisemisen helpottumiseen ja oman ajattelun jäsentymiseen tietyllä hetkellä, vaan sen käyttöön harjaantuminen voidaan nähdä merkittävänä myös tulevien matematiikan opintojen kannalta. Useat tutkimukset ovatkin osoittaneet kielentämisen toimivaksi opetusmenetelmäksi kaikilla koulutusasteilla alkuopetuksesta korkeakouluun saakka (Joutsenlahti & Kulju 2015, 60).

#### 4.1.1 Kielentämisen neljä eri ulottuvuutta

Kuten jo edellä todettiin, Joutsenlahti ja Kulju (2010b, 78) ovat eritelleet matemaattisen ajattelun ilmaisuun käytettäviksi kieliksi kolme kieltä, jotka ovat matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli sekä kuviokieli. Näiden kielten rinnalle Joutsenlahti ja Rättyä (2015, 51–52) ovat vielä lisänneet neljännen, taktiilisen toiminnan kielen. Matemaattista ajattelua voidaan siis ilmaista neljän erilaisen kielen avulla ja tämä neljän kielen malli on esitetty kuviossa 2.



**KUVIO 2.** Matemaattisen ajattelun ilmaisussa käytettävät neljä kieltä: matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli, kuviokieli ja taktiilinen toiminnan kieli (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 52).

Matematiikan symbolikielellä tarkoitetaan matematiikan omaa kieltä, johon kuuluvat esimerkiksi matemaattiset lausekkeet ja laskutoimitukset (Joutsenlahti & Kulju 2010b, 78). Tässä tutkimuksessa kehitetyn oppimateriaalin aiheena olevasta kertolaskusta symbolikieleksi voidaan erottaa esimerkiksi numerot ja kertomerkki. Matematiikan symbolikieli on tyypillisin matemaattisen ajattelun ilmaisutapa, johon perusopetuksen oppikirjat ovat Joutsenlahden (2009, 72–73) mukaan ohjanneet. Tällöin ilmaisu on suppeaa symbolien välillä liikkumista, jonka perusteella ei voi varmaksi tietää, mitä oppilas on tehtävää ratkaistessaan ajatellut (Joutsenlahti 2003, 188). Pelkkä matematiikan symbolikieli ei siis anna tarpeeksi informaatiota ja perusteluja ratkaisussa käytetyille valinnoille.

Luonnollisella kielellä tarkoitetaan kirjoitettua tekstiä tai suullista kerrontaa, joka tyypillisesti tapahtuu oman äidinkielen kautta. Äidinkieli toimii oman ajattelun välineenä ja sillä yleensä

kommunikoidaan muiden ihmisten kanssa, joten on luontevaa ottaa se mukaan myös matemaattisten tehtävien ratkaisemiseen. Luonnollisella kielellä käytyjen keskustelujen etuna on erityisesti se, että sen käyttö jäsentää oppilaan omaa ajattelua. Toisaalta oppilas saa sen kautta myös muut oppilaat ymmärtämään ajatuskulkuaan. Parhaimmassa tapauksessa luokassa voidaan luonnollisen kielen avulla saada aikaan keskustelua, jonka myötä oppilaat pystyvät muovaamaan omia käsityksiään käyttäen toisten ajatuskulkua apunaan. (Chapin ym. 2003, 7; Joutsenlahti 2003, 188–190, 193.) Sen avulla myös opettajan on helpompi ymmärtää, mitä oppilas on laskiessaan ajatellut. Näin arviointi, ja mahdollisten virhekesitysten huomaaminen on helpompaa. (Joutsenlahti 2009, 75.)

Myös Risku (2002, 121) näkee luonnollisen kielen käytön merkityksen tärkeänä. Hänen mukaansa perusteleminen puhumalla helpottaa oman ratkaisuprosessin ymmärtämistä ja auttaa korjaamaan tehdyt virheet jo itse. Askew (2012) taas on eritellyt luonnollisen kielen merkitystä matematiikan opetuksessa luokassa toteutettavien keskustelujen näkökulmasta. Hänen mukaan keskustelu matematiikan tunnilla on se, mikä auttaa oppilaita rakentamaan merkityksen kaikelle toiminnalle. Tällainen keskustelu voi olla hyvin monenlaista, sillä sen tavoite, sisältö ja konteksti voivat vaihdella. Tavoitteena voi olla esimerkiksi käsitteen selittäminen tai eri käsitteiden yhteyden selventäminen, sisältö voi liittyä esimerkiksi määritelmiin tai laskustrategioihin ja kontekstina voi olla pieni ryhmäkeskustelu tai isompi koko luokan keskustelu. (Askew 2012, 153.) Matematiikan tunnilla tapahtuvan keskustelun merkityksestä on myös tutkimusnäyttöä, sillä Opetushallituksen toteuttamassa pitkittäistutkimuksessa on todettu, että oppimistulokset paranevat, kun oppilaat selittävät omia ratkaisujaan toisilleen. Lisäksi sillä todettiin olevan myönteistä vaikutusta myös oppilaiden asenteisiin. Myös sillä, että oppilaat neuvovat toisiaan, vaikutti olevan myönteinen vaikutus oppimiseen. (Hannula & Oksanen 2013, 272–273.)

Myös Morgan (2001) toteaa suullisen kielentämisen olevan tärkeää matematiikan opiskelussa, mutta hänen mukaan kirjallisella kielentämisellä on vielä merkittävämpiä etuja. Ensinnäkin kirjallisessa kielentämisessä ei ole mahdollista saada palautetta suoraan viestin vastaanottajalta, kuten suullisessa kielentämisessä, joten kirjoitetun selityksen täytyy olla loppuun mietitty ja selkeä, sillä lukijalla ei ole mahdollisuutta kysyä tarkentavia kysymyksiä. Toisaalta kirjoitettuun kielentämiseen voi käyttää enemmän aikaa, jolloin on enemmän aikaa ajatella ja siten selvittää omaa ajatteluaan. Kolmantena etuna on se, että kirjoituksesta jää pysyvä jälki, josta on hyötyä sekä kirjoittajalle itselleen että opettajalle. Kirjoitusprosessin aikana kirjoittaja voi aina palata jo kirjoitettuun ja samalla arvioida sekä muokata omia ajatuksiaan. Toisaalta oppilaat voivat esimerkiksi pienissä ryhmissä vertailla kirjoitettuja tuotoksiaan, ja kuten jo aikaisemmin on tuotu esille, myös opettaja voi käyttää kirjoitettua kielentämistä arviointitarkoituksiin. (Morgan 2001, 233–234.) Luonnollisen kielen

monipuolisella käytöllä, sekä suullisella että kirjallisella kielentämisellä, näyttää siis olevan monenlaisia positiivisia vaikutuksia oppimisen kannalta.

Kuviokielen Joutsenlahti (2009, 76) määrittelee matemaattisten asioiden kuvaamiseksi erilaisin kuvioin tai piirroksin, mikä on erityisen hyödyllistä geometristen tehtävien hahmottamisessa. Toisaalta oppilaat myös hahmottavat asioita eri tavoin, ja joillekin oppilaille visuaalinen ajattelutapa on muutenkin kaikkein luonnollisin. Silloin piirtäminen toimii hyvänä välineenä ajatteluprosessissa. (emt., 76.) Kuviokieltä ja luonnollista kieltä voi käyttää myös rinnakkain, sillä esimerkiksi suullisessa kielentämisessä kuvat ovat hyvä lisä havainnollistuksessa.

Konkretialla on suuri merkitys erityisesti pienten oppilaiden oppimisprosessissa. Taktiilisen toiminnan kielen avulla voidaan opeteltavat asiat viedä konkreettiselle tasolle, sillä taktiilisella toiminnan kielellä tarkoitetaan ajattelun ilmaisua käsin toimintamateriaalien avulla. Matematiikan opetuksessa käytettäviä toimintamateriaaleja ovat esimerkiksi murtolukupalat ja kymmenjärjestelmäateriaalit. (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 51.) Koska alkuopetusikäisten 7–8-vuotiaiden oppilaiden ajattelu ei ole vielä abstraktilla tasolla, ovat konkreettiset kokemukset tarpeellisia heidän oppimisprosessinsa kannalta (Piaget & Inhelder 1977, 126). Riskun (2002, 121) mukaan konkreettiset välineet ja kuvat toimivat myös hyvinä arvioinnin välineinä. Oppilas voi osoittaa esimerkiksi kertolaskun käsitteen ymmärtämisen esittämällä jonkin pyydetyn kertolaskun kuvioiden tai välineiden avulla.

Toimintamateriaalien hyödyllisyydestä matematiikan opetuksessa on tehty monia tutkimuksia. Esimerkiksi Opetushallituksen toteuttaman pitkittäisarvioinnin mukaan konkreettisten välineiden käyttö alkuopetuksessa on osoittautunut hyödylliseksi oppilaan myöhemmän menestymisen kannalta (Metsämuuronen 2013a, 135). Carbonneau, Marley ja Selig (2013) taas ovat tehneet meta-analyysin tutkimuksista, joissa on selvitetty toimintamateriaalien käytön tehokkuutta matematiikan opetuksessa. Siinä toimintamateriaalien käytön todettiin edistävän oppimista, mutta niiden tehokkuus oppimisen kannalta riippui monista eri tekijöistä, kuten ohjauksesta, matemaattisesta aiheesta, oppilaiden kehitysvaiheesta, käytetystä ajasta sekä välineiden ulkomuodosta. Suurin hyöty konkreettisten välineiden käytöstä todettiin olevan 7–11-vuotiailla oppilailla, kun taas vanhemmilla oppilailla vaikutus ei ollut kovin suuri ja nuoremmilla oppilailla siitä saattoi olla jopa haittaa. Välineiden käytön vahva ohjaaminen sekä pelkistettyjen välineiden käyttö todettiin myös oppimista edistäviksi tekijöiksi toimintamateriaaleja hyödyntävässä opetuksessa. (Carbonneau ym. 2013, 393–395.) Aikaisempaan kognitiiviseen tutkimuskirjallisuuteen perustuen myös Laski, Jor’dan, Daoust ja Murray (2015) ovat esittäneet neljä periaatetta, miten konkreettisiä välineitä tulisi käyttää, jotta ne edistävät oppimista. Ensimmäisenä periaatteena on toimintamateriaalien käyttö pitkien ajanjaksojen ajan. On myös hyvä käyttää pitkiä aikoja samoja välineitä, jotta oppilaat ymmärtävät välineen ja

abstraktin käsitteen välisen yhteyden. Toisena periaatteena on se, että ajan myötä tulisi hyvin konkreettisista välineistä siirtyä abstraktimpien välineiden käyttöön. Kolmas periaate kehottaa olemaan käyttämättä arkipäiväisiä asioita muistuttavia sekä ylimääräisiä ominaisuuksia sisältäviä välineitä. Viimeisenä periaatteena on vielä se, että konkreettisen välineen ja matemaattisen käsitteen välinen yhteys tulee tehdä oppilaalle selväksi. (Laski ym. 2015, 2–6.) Oppimisen edistämisen kannalta ei siis ole yhdentekevää miten ja millaisia toimintavälineitä opetuksessa käytetään.

#### 4.1.2 Koodinvaihto eri kielten välillä

Koodinvaihdolla tarkoitetaan liikkumista eri kielten välillä. Sen avulla oppilas voi muuttaa ratkaistavana olevan ongelman kielelle, jonka avulla hän ymmärtää sen paremmin. Usein matematiikan symbolikielellä kirjoitetun tehtävän muuttaminen luonnolliselle kielelle tai kuviokielelle auttaa oppilasta tehtävän ratkaisemisessa. (Joutsenlahti & Rättyä 2011, 174–176; Joutsenlahti, Kulju & Tuomi 2012, 111.) Alkuopetuksessa eri kielten välillä liikkumista voidaan tarkastella hieman erilaisesta näkökulmasta kuin myöhemmässä opiskelussa. Joutsenlahti ja Rättyä (2015, 51) esittävät, että alkuopetuksessa uutta opetettavaa asiaa tai käsitettä tulisi käsitellä ensin taktiilisen toiminnan kielen, kuviokielen ja luonnollisen kielen avulla. Vasta lopuksi asia liitetään matematiikan symbolikieleen. Myös Risku (2002, 115–116) näkee toimintamateriaalien käytön välttämättömänä alkuopetuksessa, sillä hänen mukaansa pienten oppilaiden ajattelu on konkreettisten mallien varassa. Hän esittää myös, että konkreettiseen malliin tulisi liittää ensin puhuttu kieli ja vasta myöhemmin kirjoitettu matematiikan symbolikieli. Myöhemmällä iällä koodinvaihto eri kielten välillä voi tapahtua missä tahansa järjestyksessä sen mukaan, mikä oppijalle on kyseisessä tilanteessa parhaiten avuksi (Joutsenlahti & Rättyä 2015, 51).

Neljän kielen mallia ja koodinvaihtoa eri kielten välillä voidaan toteuttaa opetuksessa kahdella eri tavalla joko pedagogisena mallina tai ymmärtävän oppimisen mallina riippuen siitä, mihin toteutuksella pyritään. Pedagogisella mallilla tarkoitetaan sitä, kun opettaja pyrkii tekemään matematiikan symbolikielellä olevalle esitykselle merkityksiä luonnollisen kielen, kuviokielen ja taktiilisen toiminnan kielen avulla. Ymmärtävän oppimisen mallissa taas oppilas yksin tai yhdessä vertaistensa kanssa tuottaa merkityksiä annetulla kielellä olevalle esitykselle kolmen muun kielen kautta. (Joutsenlahti & Kulju 2015, 66–67.)



## 4.2 Solmu-ohjelma matematiikan opetuksessa

Solmu-ohjelma on luokanopettaja (KM) Maarit Laitisen kehittämä kielentämisen periaatetta hyödyntävä toimintamalli, jossa oppilaan peruslaskutaitoa tuetaan vahvistamalla luvun käsitteen muodostumista. Luvun käsitteellä (*procept*) tarkoitetaan käsitettä, jolla voidaan samaan aikaan tarkoittaa sekä mentaalista objektia, siihen liittyvää prosessia tai prosessin tulosta. Siinä siis menetelmätieto ja käsitetieto yhdistyvät samassa käsitteessä. Käytännössä se tarkoittaa sitä, että esimerkiksi luvun kolme käsite ymmärretään sekä prosessina, jolloin luku kolme tulee luvun kaksi jälkeen, että käsitteenä, jolla tarkoitetaan lukua kolme. (Gray & Tall 1994, 121; Laitinen, Rantamäki & Joutsenlahti 2015, 137.) Solmu-ohjelma on alun perin kehitetty tukemaan tuen tarpeessa olevia oppilaita yksilöllisesti Tampereen kaupungin Solmu-projektissa vuosina 2011–2013. Myöhemmin lähestymistapa on otettu kokeiluun myös koko luokan opetustapana Luma-Suomi 2014–2019 -kehittämishjelmassa. (Laitinen ym. 2015, 134.)

Solmu-ohjelmassa hyödynnetään matematiikan neljän kielen mallia (ks. luku 4.1) tekemällä luvut nähtäviksi, kuultaviksi ja kosketeltaviksi eri kielten avulla. Taktiilinen toiminnan kieli on mukana Solmu-ohjelman omien toimintamateriaalien eli lukumääräpalojen muodossa. Lukumääräpaloissa jokaiselle luvulle 1–10 on olemassa oma palansa, ja ominaisuuksiltaan palat ovat sellaisia, että niitä voi rakentaa päällekkäin ja niiden tausta on läpinäkyvä, jotta niiden alla voidaan hyödyntää kymppikehystä. Lukumääräpalat on esitetty kuvassa 1. Kuviokieltä Solmu-ohjelmassa taas hyödynnetään esimerkiksi silloin, kun tutkitaan piirroksia lukumääräpalojen muotoisista kuvioista. Luonnollinen kieli on mukana koko ajan, kun samalla keskustellaan siitä, mitä on tehty ja mitä kuvioden tai lukumääräpalojen avulla nähdään. Solmu-ohjelman taustalla vaikuttaakin sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys, jonka mukaan vuorovaikutuksella on suuri merkitys oppimiselle. Näihin kolmeen eri ulottuvuuteen on helppo rinnastaa vielä matematiikan symbolikieli niin, että symbolit eivät jää vain abstraktille tasolle, vaan tulevat ymmärrettäviksi eri kielten avulla. (Laitinen ym. 2015, 141, 143; Laitinen 2016.)



**KUVA 1.** Solmu-ohjelman lukumääräpalat ja niiden taustalla käytettävä kymppikehys

Solmu-ohjelman lukumääräpalojen tarkoituksena on pyrkiä suuntaamaan oppilaiden huomio lukumääriin ja niiden taustalla vaikuttaa kyky, jota kutsutaan subitisaatioksi (Laitinen ym. 2015, 141). Subitisaatiolla tarkoitetaan sitä, että yhdellä silmäyksellä voidaan tunnistaa pieniä lukumääriä laskematta niitä oikeasti. Tutkimusten mukaan tämä on yksi tärkeimmistä kyvyistä, joiden pitäisi kehittyä lapselle varhaisella iällä. Subitisaatiota on olemassa kahta eri tyyppiä. Havaintosubitisaatiolla (*perceptual subitizing*) tarkoitetaan kykyä tunnistaa pieniä lukumääriä (1-4) käyttämättä minkäänlaisia matemaattisia prosesseja. Käsitteellisellä subitisaatiolla (*conceptual subitizing*) taas tarkoitetaan kykyä hahmottaa suurempiakin lukumääriä erottelemalla suurempi lukumäärä sellaisiksi pienemmiksi lukumääriksi, jotka voidaan nähdä havaintosubitisaatiolla. Esimerkiksi voimme helposti nähdä, että dominopalassa on kahdeksan pistettä ilman laskemista, sillä ryhmittelemme siinä olevat kahdeksan pistettä kahdeksi neljän ryhmäksi. Tällöin näemme, että siinä on yksi neljän ryhmä ja toinen neljän ryhmä eli kahdeksan. (Clements & Sarama 2009, 9; Clements 1999, 401.)

Solmu-ohjelman lukumääräpaloissa lukumäärät on ryhmitelty paloihin pisteinä siten, että ne voidaan subitisaation avulla hahmottaa tietyiksi lukukuvioiksi. Koska havaintosubitisaatio yltää vain lukuun neljä saakka, tulee isompien lukumäärien kohdalla avuksi käsitteellinen subitisaatio eli lukumääräpala kahdeksan tunnistetaan kahdeksaksi, kun se nähdään kahtena nelosena. Käsitteellisen subitisaation lisäksi lukumäärien tunnistamisessa hyödynnetään kymppikehystä (ks. kuva 1), kun lukumääräpaloja käsitellään sen sisällä. Tällöin kymppikehysten avulla pystytään tunnistamaan esimerkiksi luku kahdeksan, kun nähdään, että kymmenestä puuttuu vielä kaksi. (Laitinen 2016.)

Solmu-ohjelman yhtenä keskeisenä osana on yhteen- ja vähennyslaskuun valmistavat harjoitukset, joilla vahvistetaan luvun kardinaalista ymmärtämistä eli luvun ymmärtämistä lukumääränä. Harjoitusten myötä pyritään saavuttamaan lukujonotaitojen viimeinen vaihe eli lukujonon ymmärtäminen lukumäärien jonona, jolloin siis ymmärretään luvut lukumäärinä sekä niiden paikka lukujonossa suhteessa muihin lukuihin. (Kinnunen 2003, 2–6; Laitinen ym. 2015, 142.) Lukumääräpaloilla tehtyjen yhteenlaskujen myötä oppilas yhdistelee kokonaisista lukumääräpaloista uusia lukumääriä, jotka hän pystyy lopulta myös tunnistamaan yhdellä silmäyksellä. Esimerkiksi luvuista kolme ja kaksi oppilas saa muodostettua luvun viisi. Oppilas siis hahmottaa näkemällä, että luvut kolme ja kaksi ovat yhdessä viisi ja toisaalta että viisi koostuu luvuista kolme ja kaksi. Näin lukujen 2–10 hajotelmatkin tulevat oppilaille jo tutuiksi lukumääräpaloja yhdistelemällä. Lukumääräpalojen kanssa toimimisen rinnalle on helppo ottaa mukaan matematiikan symbolikieli. Yhtäsuuruusmerkinkin merkitys merkinä, jonka molemmilla puolilla on yhtä monta, voidaan avata oppilaille lukumääräpalojen kautta jo aikaisessa vaiheessa. (Laitinen ym. 2015, 142.)

Solmu-ohjelmassa matematiikan keskeisiä periaatteita, kuten osa-kokonaisuuden periaatetta, yhteenlaskun vaihdannaisuutta sekä yhteen- ja vähennyslaskun käänteisyyttä voidaan oppia lukumääräpalojen avulla pienellä lukualueella, jolloin subitisaatio tukee näiden periaatteiden ymmärtämistä. Kun lukumääräpaloilla rakentelu tukee osa-kokonaisuus-periaatteen oivaltamista, johtaa se myös kohti multiplikatiivista ajattelua. (Laitinen ym. 2015, 143.) Lukumääräpalojen avulla laskettaessa lukuja opitaan laskemaan ryhminä, jotka yhdessä muodostavat uusia kokonaisuuksia. Tämä on askel kohti kertolaskun ymmärtämistä, kun kertolaskussa yhtä suuret osat muodostavat yhdessä uusia kokonaisuuksia. (Kinnunen 2003, 43–44; Laitinen 2016.)

# 5 KERTOLASKUN OPPIMINEN JA OPETTAMINEN

Ikäheimon ja Riskun (2004, 229) mukaan kertolaskun käsite on yksi solmukohta alkuopetuksen matematiikassa. Sen oppimisella on kuitenkin paljon merkitystä tulevan oppimisen kannalta. Jos kertolaskun käsitettä ei ole sisäistetty riittävän hyvin, voi myöhemmässä matematiikan opiskelussa tulla eteen vaikeuksia, sillä kertolaskua tarvitaan myöhemmin muun muassa sanallisissa tehtävissä, murtolukujen yhteydessä, polynomilaskennassa sekä yhtälöiden ja yhtälöparien ratkaisemisessa (Ikäheimo 1997, 80). Suomalaisessa perusopetuksessa kertolaskun käsitteen opettaminen ajoittuu toiselle vuosiluokalle, jolloin Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan käsitteen ymmärtämisen lisäksi opetettavana sisältönä on kertotaulut 1–5 sekä 10 (ks. luku 3.2). Matematiikan opetukselle tyypilliseen tapaan opiskelua jatketaan siten, että kertolaskun ymmärrystä syvennetään ja uusia kertotauluja opiskellaan myöhemmillä vuosiluokilla. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan vuosiluokkien 3–6 aikana tulisi varmistaa kertolaskun käsitteen ymmärtäminen sekä opetella uudet kertotaulut 6–9. Lopulta vielä varmistetaan kaikkien kertotaulujen 1–10 osaaminen. (Opetushallitus 2014, 235.)

Tässä luvussa tarkastelen kertolaskun oppimista ja opettamista aikaisempaan tutkimustietoon perustuen. Ensin luvussa 5.1 käsittelen kertolaskua sen käsitteen ymmärtämisen ja opettamisen näkökulmasta. Aluksi tarkastelen kertolaskun käsitteen perustaa ja sitä, millaisia esitaitoja tarvitaan, jotta voi ymmärtää kertolaskun käsitteen. Sen jälkeen tarkastelen vielä kertolaskun käsitteen ymmärtämisen taustalla olevia tekijöitä ja esittelen erään niiden pohjalta tehdyn kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen liittyvän tutkimuksen. Lopuksi pohdin käsitteellisen ymmärtämisen ja sujuvan laskutaidon vastakkainasettelua kertolaskun näkökulmasta. Luvussa 5.2 tarkastelen erilaisia laskustrategioita, joita voidaan hyödyntää kertolaskuja laskettaessa ja joiden oppiminen on tärkeää sujuvan kertolaskutaidon saavuttamisen kannalta. Viimeisessä luvussa 5.3 tarkastelen hieman olemassa olevia peruskoulun matematiikan oppikirjoja kertolaskun opetuksen osalta. Ensin tarkastelen Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004) mukaisia kirjoja, jotka olivat olemassa tätä oppimateriaalia kehitettäessä ja lopuksi tarkastelen vielä kahta Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaista kirjaa, jotka ilmestyivät tutkimusprosessin aikana.

## 5.1 Kertolaskun käsitteen oppiminen ja opettaminen

Kertolaskun käsitteen oppimisessa voi olla monenlaisia hankaluuksia. Kinnusen (2003, 12–13, 43–44) mukaan ongelma voi olla siinä, että lukujen ymmärtämisessä ja lukujonotaidoissa on puutteita. Kertolaskun oppimisen kannalta on tärkeää, että lukujono ymmärretään lukumäärien jonona eli jonossa olevat luvut voidaan koota pienemmistä, jonossa aiemmin esiintyvistä luvuista. Esimerkiksi luku 4 voidaan koota luvuista 3 ja 1 tai 2 ja 2. Kertolaskun tuloa tulisi siis ajatella lukumääränä, joka voidaan koota pienemmistä, keskenään samankokoisista luvuista. Jotta oppilas pystyy tähän, täytyy hänen lukujenkäsittelytaitonsa olla jo hyvin kehittyneellä tasolla. Taitoa tulisi kehittää alkuopetuksessa huolellisesti, sillä monet koulutulokkaat ovat lukujenkäsittelytaidoissa niin alkeellisella tasolla, etteivät he pysty etenemään opetuksessa tavalliseen tahtiin. (emt., 2–6.)

Hyvien lukujonotaitojen lisäksi oppilaan täytyy hallita hyvin yhteenlaskun käsite, sillä se on pohjana kertolaskun käsitteen ymmärtämiselle (Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 2004, 66). Suomessa kertolaskun käsitteen opettaminen aloitetaan tyypillisesti yhteenlaskun kautta. Esimerkiksi oppikirjat Tuhattaituri 2a (2007), Uusi matikkamatka 2 kevät (2010), Matikka 2 syksy (2009) sekä Numero 2 kevät (2009) ohjaavat oppilasta muodostamaan kuvista ensin yhteenlaskuja ja sen jälkeen muodostetaan vasta varsinainen kertolasku yhteenlaskun pohjalta. Riskun (2002, 127) mukaan yhteenlaskun avulla tulisi saada luotua oppilaille kokemuksen kautta tarve kertolaskulle, kun pelkän yhteenlaskun avulla joistain laskuista tulisi turhauttavan pitkiä.

On myös esitetty näkemyksiä siitä, että kertolaskun käsitteen ymmärtäminen ei perustuisikaan toistuvalla yhteenlaskulle. Esimerkiksi Park ja Nunes (2001) ovat tutkineet, tuottaako toistuvan yhteenlaskun kautta opettaminen parempia tuloksia kertolaskun oppimisessa kuin vastaavuuden (*schema of correspondence*) kautta opettaminen. Toistuvalla yhteenlaskulla tarkoitettiin tutkimuksessa erilaisten, mutta lukumäärältään yhtä suurien ryhmien yhteenlaskua ja vastaavuudella taas tarkoitettiin kahden lukumäärän muuttumatonta suhdetta. Esimerkkinä vastaavuusperiaatteen kautta opettamisesta oli tehtävä, jossa tehtiin kaksi kattilallista tomaattikeittoa ja kumpaankin kattilaan tarvittiin kolme tomaattia. Kysymyksenä oli, kuinka monta tomaattia tarvittiin. Tutkimuksen tuloksena oli, että vastaavuusperiaatteella oppineet oppilaat menestyivät kertolaskua koskeissa tehtävissä paremmin kuin yhteenlaskun kautta oppineet. Johtopäätöksenä oli, että kertolaskun käsitteen perusta on vastaavuudessa ja toistuva yhteenlasku on vain proseduuri, jolla voidaan ratkaista kertolaskuja. (Park & Nunes 2001.)

Eri näkemykset kertolaskun käsitteen perustasta ovat nähtävillä myös kansainvälisellä tasolla. Kuten jo edellä todettiin, Suomessa kertolasku tyypillisesti opetetaan toistuvan yhteenlaskun kautta. Samoin toistuva yhteenlasku on opetuksen perustana myös Iso-Britanniassa ja Yhdysvalloissa.

Kuitenkin esimerkiksi Japanissa toistuvaa yhteenlaskua ei pidetä kertolaskun käsitteen perustana, vaan yhtä suurissa ryhmissä olevien kappaleiden määrä, ryhmien lukumäärä sekä kappaleiden kokonaislukumäärä muodostavat kertolaskun käsitteen olemuksen. Toistetun yhteenlaskun todetaan japanilaisen opetuksen mukaan olevan vain yksinkertainen tapa laskea kertolaskuja. (Department for Education and Skills 2006, 114; Park & Nunes 2001, 765; Watanabe 2003, 116–118.)

Smithin ja Smithin (2006) mukaan matematiikan opetuksen kirjallisuuteen perustuen kertolaskun ymmärtäminen pohjautuu neljään toisiinsa liittyvään tekijään. Ensimmäinen niistä on suureen ymmärtäminen (*understanding quantity*). Suureella tarkoitetaan sellaisen asian ominaisuutta, joka voidaan laskea tai mitata. Suureen arvo koostuu sekä luvusta että yksiköstä. Toinen tekijä on kertolaskua vaativien tehtävätilanteiden ymmärtäminen (*understanding multiplicative problem situations*), jolla tarkoitetaan kykyä tunnistaa sellaiset sanalliset tehtävät, joissa tarvitaan kertolaskua sekä kykyä erottaa ne muita laskutoimituksia vaativista tehtävistä. Myös kertolaskun merkintätavan yhdistäminen kieleen ja sanallisiin tehtäviin oikeanlaisessa merkityksessä liittyvät kertolaskutehtävien ymmärtämiseen. Kolmas tekijä on saman suuruisten joukkojen ymmärtäminen (*understanding equal groups*), jolla tarkoitetaan kykyä ryhmitellä asioita niin, että ymmärtää saman suuruisten ryhmien merkityksen kertolaskuissa ja on taipuvainen kertaistamaan saman suuruisia ryhmiä sen sijaan, että laskisi asiat erillisinä. Lisäksi taito yhdistää ja hajottaa lukuja yhtä suuriin ryhmiin liittyy tähän kykyyn. Neljäntenä tekijänä on yksiköitten ymmärtäminen merkittävänä kertolaskussa (*understanding units relevant to multiplication*). Sillä tarkoitetaan kykyä tunnistaa erilaisista yksiköistä ne, jotka ovat relevantteja kertolaskulle. Erityisesti tällä tarkoitetaan kykyä ymmärtää ero yksittäisten yksiköitten, kuten sentti, ja yhdistettyjen yksiköitten, kuten kymmenet, välillä. Lisäksi tärkeää on ymmärtää, että kertolaskussa ensimmäinen luku edustaa ryhmien määrää ja toinen luku asioiden määrää jokaisessa ryhmässä. Nämä kaksi lukua siis sisältävät eri yksiköitä toisin kuin yhteenlaskussa. (Smith & Smith 2006, 141–142.)

Oppilaiden ymmärrystä kertolaskun käsitteestä koskevassa tutkimuksessaan Smith ja Smith (2006, 143) pyrkivät arvioimaan käsitteen ymmärtämistä neljän edellä mainitun tekijän pohjalta teettäen oppilailla erilaisia tehtäviä niihin liittyen. He päätyivät tutkimuksessaan viiteen erilaiseen tehtävätyyppiin, jotka vaikuttivat tarkoituksenmukaisella tavalla tuottavan tietoa siitä, ymmärtävätkö oppilaat kertolaskun käsitteen. Yksi tehtävätyypeistä oli mekaaninen kertolasku (esim.  $3 \cdot 4$ ), joka oletettiin helpoksi ja nopeaksi tehtäväksi ja jolla testattiin kykyä tuottaa vastaus nopeasti joko muistamalla tai jollain laskustrategialla. Toisessa tehtävätyypissä pyydettiin muodostamaan laskutarina annetusta kertolaskusta, millä selvitettiin ymmärrystä yhteydestä kertolaskulausekkeen sekä sanallisen tehtävän, suureen ja yksikön välillä. Kolmannessa tehtävätyypissä pyydettiin piirtämään kuva annetusta kertolaskusta, ja sillä haluttiin tutkia oppilaiden tuottamaa visuaalista

esitystä kertolaskurakenteesta ja yksiköistä. Neljännessä tehtävätyypissä annetusta kertolaskusta pyydettiin muodostamaan yhteenlasku, jotta voitiin selvittää, ymmärtävätkö oppilaat kertolaskun ja yhteenlaskun yhteyden. Viidentenä tehtävätyyppinä oli erilaisia sanallisia tehtäviä kertolaskuun ja jakolaskuun liittyen. (Smith & Smith 2006, 143, 148–149.) Näissä tehtävissä kertolaskun käsitteen ymmärtämisen selvittämisessä on hyödynnetty kielentämisen lähestymistapaa, sillä tehtävissä on käytetty matematiikan symbolikielen lisäksi luonnollista kieltä sekä kuviokieltä (ks. luku 4.1).

Samassa tutkimuksessaan Smith ja Smith (2006) vertailivat kahden eri ryhmän tuloksia samoissa kertolaskun käsitteen ymmärtämistä osoittavissa tehtävissä. Toinen ryhmä koostui neljännen luokan oppilaista, joiden opetuksessa oli edellisenä vuotena painotettu kertolaskujen ulkoa oppimista ja he olivat silloin osoittaneet ulkoa osaamisensa. Toinen ryhmä taas koostui kolmannen luokan oppilaista, jotka olivat saaneet ymmärtämistä, ongelmanratkaisua ja matemaattista keskustelua korostavaa opetusta. Käsitteen ymmärtämistä ilmentävissä tehtävissä, jotka edellä jo esiteltiin, menestyivät paremmin kolmannen luokan oppilaat, joiden opetuksessa ei oltu keskitytty kertolaskujen ulkoa oppimiseen. Lisäksi nämä kolmannen luokan oppilaat menestyivät mekaanisissa kertolaskutehtävissä sekä sanallisissa tehtävissä paremmin kuin ulkoa oppineet neljännen luokan oppilaat. Käsitteen ymmärtämisen painottaminen opetuksessa ei siis parantanut pelkästään käsitteen ymmärtämistä, vaan myös mekaanista laskutaitoa. Tosin ajallisesti neljäsluokkalaiset tuottivat tehtäviin vastauksia nopeammin, mutta vastaukset osoittautuivat kuitenkin huomattavasti useammin vääriksi kuin kolmasluokkalaisilla. (Smith & Smith 2006, 140, 143–148.)

Tätä ulkoa opetteluun ja käsitteen ymmärtämisen vastakkainasettelua voidaan tarkastella myös Kilpatrickin kollegoineen (2001) määrittelemän matemaattisen osaamisen käsitteen näkökulmasta. Matemaattinen osaaminen voidaan heidän mukaan jakaa viiteen osa-alueeseen, joista kaksi ovat käsitteellinen ymmärtäminen sekä proseduraalinen sujuvuus (ks. luku 3.1). Kertolaskun oppimisen näkökulmasta kertolaskun käsitteen ymmärtämisellä viitataan käsitteelliseen ymmärtämiseen, kun taas proseduraalisella sujuvuudella voidaan kertolaskun oppimisen yhteydessä viitata kertotaulujen osaamiseen ja siten sujuvaan kertolaskutaitoon. Kilpatrick kollegoineen (2001, 122) toteaa, että usein koulumatematiikassa käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus nähdään kilpailevan toisiaan vastaan siinä, kumpaan opetuksessa tulisi painottaa enemmän. Kuitenkin tällainen taidon ja ymmärryksen vastakkainasettelu luo vääränlaisen kahtiajaon, sillä nämä kaksi osa-aluetta ovat oikeasti yhteen kietoutuneita. Käsitteellisestä ymmärryksestä on hyötyä taitojen oppimisessa ja toisin päin. (Kilpatrick ym. 2001, 122.) Selvästi siis kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen ulkoa oppimisen välille tulisi löytää opetuksessa tasapaino, jotta sekä käsitteellinen ymmärrys että sujuva laskutaito voivat kehittyä.

Magdaksen (2012, 13–14) mukaan kertolaskun ja erityisesti kertotaulujen opetuksessa voidaan myös nähdä kaksi eri vaihetta. Ensimmäinen vaihe on löytää vastaukset kertotauluissa sekä ymmärtää vastausten välillä oleva yhteys ja toinen vaihe taas on vastausten ulkoa opettelu. Hänen mukaansa ensimmäinen vaihe jää usein opetuksessa liian vähälle huomiolle, jolloin kertotaulujen loogisen rakenteen ymmärtäminen jää puutteelliseksi ja sitä kautta myös vastausten muistaminen on hankalampaa, kun niiden välillä ei ole nähtävillä loogisia yhteyksiä. (Magdas 2012, 13–14.) Tässäkin molempien vaiheiden painottaminen lienee paras ratkaisu käsitteen ymmärtämisen ja laskusujuvuuden kannalta.

## *5.2 Kertolaskujen laskemisen erilaiset strategiat*

Kertolaskun käsitteen ymmärtämisen lisäksi oppilaiden tulisi saavuttaa sujuva laskutaito. On kuitenkin olemassa erilaisia, sekä hitaita että nopeita strategioita siihen, miten oppilaat ratkaisevat kertolaskuja. Useissa tutkimuksissa on löydetty oppilaiden kertomana esimerkiksi seuraavia strategioita: ulkoa muistaminen, toistuva yhteenlasku, muista tuloksista johtaminen, lukujonona laskeminen, tulosten hakeminen kertotaulun avulla ja erityiskeinot, kuten esimerkiksi yhdeksän kertotaulun tulosten laskeminen sormien avulla. (Lemaire & Siegler 1995; Mabbott & Bisanz 2003; Reed, Stevenson, Broens-Paffen, Kirschner & Jolles 2014.) Joissain tutkimuksissa on muodostettu erilaisia luokkia myös sen perusteella, mitä strategiaa oppilaat tyypillisimmin käyttävät, sillä oppilaat saattavat käyttää erilaisia strategioita eri tilanteissa ja eri laskujen yhteydessä. Tällä tavoin muodostetuiksi luokiksi esimerkiksi Steel ja Funnell (2001, 45) saivat tutkimuksessaan seuraavanlaiset kategoriat: ulkoa muistaminen, ulkoa muistaminen ja muiden tulosten avulla laskeminen, sekoitetut strategiat, lukujonon avulla luettelu sekä ei-strategiaa. Sekoitetut strategiat - luokassa olleet oppilaat käyttivät kertolaskujen laskemisessa sekaisin eri strategioita kuten muistamista, muiden tulosten avulla laskemista sekä lukujonon avulla luettelua.

Tyypillinen kehityskulku eri strategioiden käytössä on monien aikaisempien tutkimusten perusteella kuitenkin se, että kertolaskujen vastausten hakeminen pelkästään muistista yleistyy iän myötä (De Brauer, Verguts & Fias 2006, 44–45). Esimerkiksi Lemairen ja Sieglen (1995, 87–88) tutkimuksessa toisen vuosiluokan oppilaiden strategiat kehittyivät siten, että kolmen testauksen aikana muistista hakeminen -strategian käyttö lisääntyi jopa 54 prosenttiyksikköä ja esimerkiksi toistetun yhteenlaskun käyttö väheni 24 prosenttiyksikköä. Myös Mabbott ja Bisanz (2003, 1097–1098) saivat tutkimuksessaan samankaltaisia tuloksia, sillä kuudesluokkalaiset käyttivät strategianaan useammin vastausten hakemista muistista kuin neljäsluokkalaiset. Kuitenkin molemmissa ikäluokissa vastausten hakeminen muistista oli yleisimmin käytetty strategia. Steel ja



Funnell (2001) päätyivät myös samankaltaiseen kehityskulkuun tutkiessaan 8–12-vuotiaiden oppilaiden strategioita. He jakoivat oppilaat erilaisiin luokkiin sen perusteella, mitä strategioita he käyttivät ja yli puolet 10–12-vuotiaista kuului muistista palauttamisen ryhmään, kun taas 8–9-vuotiaista yli puolet kuuluivat ryhmään, jossa käytettiin sekaisin eri strategioita ja vain noin 10 % kuului pelkän muistista palauttamisen ryhmään. (Steel & Funnell 2001, 43–45.) Kuten olettaa saattaa, monissa tutkimuksissa ulkoa muistaminen on todettu nopeimmaksi laskustrategiaksi (ks. esim. Reed ym. 2014; Steel & Funnell 2001), joten sujuvan laskutaidon saavuttamiseksi ulkoa muistaminen lienee laskustrategioista tehokkain.

Vaihdannaisuus on kertolaskun yksi tärkeä ominaisuus, joka helpottaa laskemista huomattavasti. Edellä mainituissa tutkimuksissa sitä ei kuitenkaan mainittu erillisenä strategiana kertolaskujen laskemiselle. Vaikka vaihdannaisuus onkin laskemista huomattavasti helpottava ominaisuus, vaarana voi kuitenkin olla, että sitä korostetaan opetuksessa liikaa. Sen seurauksena oppilaat saattavat kuvittelevat, ettei laskun kirjoitusjärjestyksellä ole merkitystä, kun tulo on joka tapauksessa sama. Se tuottaa kuitenkin vaikeuksia ongelmaratkaisutehtävien laskulausekkeissa, kun yksiköt ovat mukana. (Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 2004, 18.) Välineiden kanssa toimiminen ja piirtäminen ovat hyviä keinoja vaihdannaisuuden havainnollistuksessa, sillä niiden avulla laskujen ero voidaan nähdä selvästi (Ikäheimo 1997, 80).

Kertolaskujen laskemiseen käytetään siis monenlaisia strategioita, kuten toistuvaa yhteenlaskua, muista tuloksista johtamista, ulkoa muistamista ja lukujonon avulla laskemista. Lisäksi vaihdannaisuus on yksi laskemista helpottava kertolaskun ominaisuus. Kuten edellä todettiin, iän myötä kertolaskujen ulkoa muistaminen lisääntyy, mikä on luonnollinen suunta harjoittelun määrän kasvaessa. On kuitenkin tärkeää tarjota erilaisia strategioita erilaisille oppijoille sujuvan laskutaidon saavuttamiseksi ja ulkoa oppimisen helpottamiseksi.

### *5.3 Kertolasku perusopetuksen oppikirjoissa*

Tämän tutkimuksen tavoitteena on kehittää oppimateriaalia kertolaskun opetukseen, joten on syytä tarkastella kertolaskun opetusta myös olemassa olevien oppikirjojen näkökulmasta. Useissa matematiikan oppikirjoissa kertolaskun opetus perustuu oppilaan oman tuottamisen näkökulmasta lähes pelkästään matematiikan symbolikielen käyttöön. Tämän tutkimuksen oppimateriaalin ensimmäinen versio on kehitetty kokonaisuudessaan vuoden 2015 syksyllä, jolloin käytössä oli vielä vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ja sen mukaiset oppikirjat. Sen vuoksi tässä tarkastellaan vielä vuoden 2004 opetussuunnitelman mukaisia oppikirjoja, kun uuden opetussuunnitelman (2014) mukaiset kirjat olivat vasta tekeillä. Lähes kaikki tarkastellut oppikirjat

(Tuhattaituri 2a (2007), Uusi matikkamatka 2 kevät (2010), Matikka 2 syksy (2009) ja Numero 2 kevät (2009)) hyödynsivät erilaisia kuvia oppimisen ja ymmärtämisen tukena, mutta tehtävissä ei kuitenkaan pyydetty oppilaita piirtämään kuvia laskuista kertolaskun käsitteen oppimisen vaiheessa. Vain yhdessä oppikirjassa (Numero 2 kevät) piirtämistä käytettiin kertolaskun käsitteen ymmärtämisen vaiheessa useaan otteeseen, mutta myöhemmin kertotaulujen oppimisen vaiheessa tukeuduttiin lähinnä kirjan valmiisiin kuviin. Myös Uusi matikkamatka 2 kevät -kirjassa pyydettiin yhden kerran oppilasta piirtämään mekaanisesta kertolaskulausekkeesta kuva. Tuhattaituri 2a:ssa taas piirtämistä käytettiin vain sanallisten tehtävien yhteydessä. Samoin kuin Matikka 2 syksy -kirjassa piirtämistä käytetään tukena vain kahden kertotauluun liittyvien sanallisten tehtävien yhteydessä. Oppikirjat eivät siis ohjaa piirtämisen käyttöön opetuksessa kovinkaan paljon, vaikka jo vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa matematiikan oppimisen tavoitteissa vuosiluokilla 1–2 mainitaan monipuolisten kokemusten saaminen eri tavoista esittää matemaattisia käsitteitä sekä ratkaisujen ja päätelmien perustelun oppiminen kuvien avulla. (Opetushallitus 2004, 158).

Oppilaan kirjat eivät myöskään ohjaa toimintamateriaalien käyttöön, vaan konkreettiset harjoitukset löytyvät yleensä opettajan oppaista ja muista lisämateriaaleista, joten niiden käyttö jää opettajan toiminnan varaan (ks. esim. Uusi matikkamatka 2 kevät: Opettajan opas (2010)). Myöskään luonnollisen kielen käyttö tehtävissä ei esiintynyt kuin yhdessä oppikirjassa (Uusi matikkamatka 2 kevät), jossa oli tehtäviä, joissa pyydettiin kertomaan omasta päättelystä tai keksimään laskutarina annetusta laskusta. Kuitenkin puhutun ja kirjoitetun kielen käyttö mainitaan myös jo vuoden 2004 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa, joten siihen nähden luonnollista kieltä käytettiin kirjoissa vähän (Opetushallitus 2004, 158).

Tutkimuksen kuluessa uusien Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaiset oppikirjat ovat ehtineet ilmestyä, joten on syytä tarkastella hieman myös niitä. Näyttäisi kuitenkin siltä, että osassa uuden Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaisista oppikirjoista piirtäminen on nostettu keskeiseen rooliin kertolaskun opetuksen kohdalla, sillä esimerkiksi Tuhattaituri 2a:ssa (2016) oppilaita pyydetään joka kertotaulun kohdalla piirtämään kaksi kuvaa annetuista mekaanisista kertolaskuista. Kuitenkaan kaikki oppikirjasarjat eivät näytä vielä hyödyntävän sitä, sillä esimerkiksi Kymppi 2 syksy -kirjassa (2016) ei ohjata ollenkaan oppilasta piirtämään itse, vaan kirjassa hyödynnetään valmiita kuvioita. Sanallisissakin tehtävissä on aina samanlainen kirjan tarjoama valmis palkkikuvio. Tämän pienen katsauksen perusteella ei voida vielä tehdä suurempia johtopäätöksiä, mutta näyttäisi siltä, että ainakaan aivan kaikki Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) mukaiset oppikirjat eivät vielä hyödynnä piirtämistä oppimisen tukena.

## 6 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tutkimuksen tehtävänä on kehittää oppimateriaalikokonaisuus kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen 1–5 ja 10 opetukseen. Tarkoituksena on saada aikaan kokonaisuus, jonka tehtävät ja harjoitukset hyödyntävät mahdollisimman paljon kielentämisen neljän kielen mallia. Lisäksi oppimateriaalin kehittämisen taustalla olevana erityispiirteenä vaikuttaa se, että oppimateriaalissa hyödynnetään Solmu-ohjelman lukumääräpaloja, jotka ovat tutkimuksessa olleelle luokalle tuttu ja jo ensimmäiseltä luokalta lähtien käytössä ollut toimintamateriaali. Koska kielentämisen neljän kielen malli on vahvasti mukana myös Solmu-ohjelmassa, on näiden kahden toimintamallin yhdistäminen toimiva valinta tämän tutkimuksen oppimateriaalin kehittämisen taustalle.

Tavoitteena on kehittää oppimateriaali, jonka avulla voidaan tukea kertolaskun käsitteen ymmärtämistä sekä kertotaulujen systemaattisen rakenteen käsittämistä ja sen hyödyntämisen oppimista. Tutkimuksessa kehitettyä oppimateriaalia testataan kokonaisuudessaan opetuksessa, ja sen pohjalta materiaalia arvioidaan tutkivan opettajan, oppilaan ja oppisisältöjen oppimisen näkökulmista. Testauksen ja arvioinnin pohjalta oppimateriaalia kehitetään vielä edelleen vastaamaan paremmin sille asetettuja tavoitteita.

Tutkimuskysymyksiksi muotoutuivat kolme kysymystä. Koska kyseessä on kehittämistutkimus, jonka tavoitteena on kehittää oppimateriaalia, rakentuvat tutkimuskysymykset kehittämistutkimuksen mallin mukaisesti. Ensimmäinen kysymys liittyy ongelma-analyysiin, jossa kartoitetaan aiempaa tutkimuskirjallisuutta aiheeseen liittyen. Toinen kysymys liittyy kehitettävän oppimateriaalin ensimmäisen version arviointiin ja kolmas kysymys lopulliseen kehittämistuotokseen. Tutkimuskysymyksiksi muotoutuivat siis seuraavat kysymykset:

1. Mitkä tekijät vaikuttavat kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen ja kertotaulujen oppimiseen?
2. Millaisena tutkimuksen aikana kehitetyn oppimateriaalin 1. versio koettiin opetuskokeilussa?
  - 2.1 Millaisena oppimateriaali näyttäytyi oppisisältöjen oppimisen näkökulmasta?

- 2.2 Millaisena tutkiva opettaja koki oppimateriaalin opetuskokeilussa?
- 2.3 Millaisena oppilaat kokivat oppimateriaalin tehtävät opetuskokeilussa?
- 3. Millaisella oppimateriaalilla voidaan tukea kertolaskun käsitteen ymmärtämistä ja kertotaulujen 1–5 ja 10 oppimista 2. luokalla?

Ensimmäisellä tutkimuskysymyksellä pyrin kartoittamaan aiemmasta tutkimuskirjallisuudesta tietoa siitä, millä tekijöillä on merkitystä kertolaskun käsitteen ymmärtämisen ja kertotaulujen oppimisen kannalta. Aiemman tutkimuskirjallisuuden lisäksi myös tämän tutkimuksen opetusjakson aikana tehdyt empiiriset havainnot täydentävät vastausta tähän kysymykseen. Tähän kysymykseen vastataan luvussa 9.1. Toinen tutkimuskysymys koskee kehitetyn oppimateriaalin arviointia ja siihen etsitään vastausta opetusjakson aikana kerätyn aineiston kautta. Kysymys jakaantuu vielä kolmeen osaan, joista ensimmäisessä osassa tarkastelen oppimateriaalia oppisisältöjen oppimisen näkökulmasta. Toisessa osassa tarkastelen oppimateriaalia omasta näkökulmastani eli tutkivan opettajan näkökulmasta. Kolmannessa osassa tarkastelen oppimateriaalia oppilaiden näkökulmasta. Vastaus tähän tutkimuskysymykseen on esitetty luvussa 9.2. Kolmanteen tutkimuskysymykseen vastaa kehitetty oppimateriaali, jonka ensimmäinen versio kuvataan luvussa 8.2 ja siihen tehdyt muutokset esitellään luvussa 10. Kokonaisuudessaan toinen versio eli lopullinen oppimateriaali on esitelty liitteissä 3–7.

# 7 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

Tässä luvussa esittelen, miten tutkimus on kokonaisuudessaan toteutettu. Luvussa 7.1 esittelen, miten tutkimusprosessi eteni. Aluksi kerron, miltä pohjalta oppimateriaalia alettiin kehittää. Sen jälkeen esittelen tarkemmin, miten oppimateriaalin testaaminen toteutettiin eli millaisessa kontekstissa tehtäviä ja harjoituksia testattiin ja millaista aineistoa testaamisen yhteydessä kerättiin oppimateriaalin arvioimista varten. Luvussa 7.2 esittelen, mitä sisällönanalyysillä tarkoitetaan ja miten eri tavoin monipuolisesti kerättyä aineistoa analysoitiin tässä tutkimuksessa.

## 7.1 Tutkimuksen eteneminen

Tutkimus eteni soveltaen kehittämistutkimuksen mallia tutkimuksen toteuttamisesta (ks. luku 2). Tutkimus alkoi ongelma-analyysillä, joka toteutui tässä tutkimuksessa sekä teoreettisena että pienimuotoisesti myös empiirisenä. Ongelma-analyysin avulla pyrittiin selvittämään, millainen materiaali voisi olla hyvä kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen oppimisen kannalta ja millaisiin tekijöihin tulisi materiaalin suunnittelussa kiinnittää erityisesti huomiota. Teoreettinen ongelma-analyysi koostui tämän tutkimuksen teoreettisesta viitekehyksestä, jossa paneudutaan perusopetuksen oppimateriaaleihin ja opetussuunnitelman perusteiden vaatimuksiin sekä siihen, millaisia ongelmia kertolaskun käsitteen opetuksessa on nähty aikaisemmassa tutkimuskirjallisuudessa. Lisäksi teoreettisessa ongelma-analyysissä perehdyttiin kielentämisen neljän kielen malliin sekä Solmu-ohjelmaan, jotka valittiin kehittämisen taustalle pedagogiseksi lähestymistavoiksi. Teoreettinen ongelma-analyysi on siis kokonaisuudessaan nähtävillä luvuissa 3–5. Lisäksi teoreettisen ongelma-analyysin lopuksi toteutettiin pienimuotoinen empiirinen ongelma-analyysi, jossa tarkasteltiin muutamien oppikirjojen kertolaskujakson osuuksia todeten, ettei kirjoissa kovinkaan paljon ohjata hyödyntämään luonnollista kieltä, kuvien piirtämistä tai konkreettisten välineiden käyttöä kertolaskun opetuksessa (ks. luku 5.3).

Ongelma-analyysin jälkeen alkoi kehittämisprosessi, jossa aloitettiin oppimateriaalin suunnittelu ja kehittäminen tulevaa opetusjaksoa varten. Vaikka kehittämistutkimuksessa tyypillisesti kehitettävä tuotos on valmis ennen sen testaamisvaihetta, tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan kehitetty etukäteen täysin valmista oppimateriaalia, sillä oppilaiden taitotaso ja tarpeet haluttiin ottaa

materiaalissa huomioon erityisen hyvin. Ennen opetusjakson alkua oli siis valmiina vain raamit koko jaksolle sekä joitain harjoituksia ja tehtäviä, mutta suurin osa materiaalin monisteista ja harjoituksista muotoutui vasta opetusjakson aikana. Näin pystyttiin parhaalla mahdollisella tavalla vastaamaan oppilaiden tarpeisiin. Esimerkiksi kertolaskun käsitteen oppimiseen käytettiin lopulta paljon enemmän aikaa kuin alun perin oli tarkoitus ja siihen kehitettiin monia eri harjoituksia ja tehtävämonisteita. Tällä tavalla oppimateriaalin kehittäminen oli iteratiivinen prosessi, joka kulki rinnakkain materiaalin testaus- ja arviointivaiheen kanssa. Jokaisen tunnin jälkeen pystyttiin aina arvioimaan tehtyjen harjoitusten ja monisteiden toimivuutta ja kehittämään sen pohjalta paremmin tarpeisiin vastaavaa ja toimivampaa materiaalia seuraavalla kerralla. Tällä tavalla kehittämisprosessin aikana toteutui myös pieniä kehittämissyklejä, kun esimerkiksi samankaltaista harjoitusta käytettiin eri kertotaulujen yhteydessä, mutta seuraavaa kertaa varten sitä oli jo muokattu vastaamaan paremmin tavoitteita edellisellä kerralla ilmenneiden ongelmakohtien pohjalta.

Kehittämisprosessin rinnalla toteutui siis materiaalin testaus- ja arviointivaihe, kun materiaalia testattiin erään tamperelaisen koulun toisella vuosiluokalla, jossa opetin kertolaskujakson kehittämäni oppimateriaalia hyödyntäen. Luokassa oli 24 oppilasta, joista 16 oli poikia ja 8 tyttöjä. Kertolaskujakson pituus oli kuusi viikkoa ja matematiikan opetusta oli neljä tuntia viikossa. Yksi oppitunti viikossa oli jakotunti, jolloin tunneilla oli mukana noin puolet oppilaista ja erityisesti silloin opetus pyrittiin viemään konkreettiselle tasolle hyödyntäen esimerkiksi lukumääräpaloja. Taulukossa 1 on esitetty tarkemmin, missä järjestyksessä eri aiheet opiskeltiin jakson aikana ja miten sisällöt jakaantuivat eri viikoille.

**TAULUKKO 1.** Opetusjakson oppisisällöt ja niihin käytettyjen oppituntien määrä viikkojen aikana

Viikko 1	Viikko 2	Viikko 3	Viikko 4	Viikko 5	Viikko 6
kertolaskun käsite (4h)	10:n kertotaulu (2h)  5:n kertotaulu (2h)	5:n kertotaulu (1h)  2:n kertotaulu (1h)  vaihdannaisuus (1h)  2:n kertotaulu +vaihdannaisuus (1h)	4:n kertotaulu (3h)  luvut 1 ja 0 kertolaskussa (1h)	3:n kertotaulu (3h)  yhdistetyt laskutoimitukset (1h)	yhdistetyt laskutoimitukset (1h)  kertaus (2h)  koe (1h)

Kuten taulukosta 1 nähdään, kertolaskun käsitteen opiskeluun käytettiin aikaa yhden viikon ajan eli yhteensä neljä oppituntia, jonka jälkeen käsitettä vielä hieman varmisteltiin kymmenen kertotaulun

opiskelun kohdalla. Jokaiseen kertotauluun käytettiin aikaa noin kolmen oppitunnin verran. Poikkeuksena oli kahden kertotaulu, joka tuntui oppilaista helpolta, joten sitä harjoiteltiin vain yksi oppitunti ja sen jälkeen se oli aiheena yhdessä kertolaskun vaihdannaisuuden kanssa. Yhteensä koko kertolaskujaksoon käytettiin aikaa 24 oppituntia.

Kyseisen luokan oppilaat olivat ensimmäisestä luokasta lähtien opiskelleet matematiikkaa Solmu-ohjelman mukaisesti. Lukumääräpalat olivat heille siis toimintamateriaaleina hyvin tuttuja. Osittain siitä syystä Solmu-ohjelman lukumääräpalat valittiin mukaan tutkimukseen, sillä oli tarkoituksenmukaista, että oppilaat saivat jatkossakin käyttää oppimisen tukena samoja toimintamateriaaleja kuin mihin he olivat aikaisemmin tottuneet. Solmu-ohjelman myötä oppilaat olivat yltäneet hyviin oppimistuloksiin, joten oppilaiden kannalta olisi ollut väärin muuttaa hyväksi havaittuja toimintamalleja. Lopulta tutkimuksen myötä Solmu-ohjelman lukumääräpalat osoittautuivat hyvin päteviksi toimintamateriaaleiksi kertolaskun käsitteen oppimiseen.

Vaikka kehittämistutkimukselle on tyypillistä, että sen toteuttaa useasta henkilöstä koostuva tutkimusryhmä (ks. esim. Kiviniemi 2015, 229–230), tämä tutkimus on vain yhden tutkijan toteuttama. Kuitenkin testaamisessa mukana olleen luokan opettaja toimi asiantuntijana oppimateriaalin testausvaiheen aikana. Hänen kommenttinsa kokeneena luokanopettajana on otettu huomioon materiaalin kehittämisessä ja arvioinnissa asiantuntijan näkökulmana, joten jonkinasteinen kehittämistutkimukselle tyypillinen kehittämiskumppanuus tutkimuksessa on kuitenkin nähtävillä.

Testausvaiheen aikana kerättiin monenlaista materiaalia myöhempää oppimateriaalin arviointia varten. Kaikki oppitunnit videoitiin ja kameran paikkaa vaihdeltiin luokassa tarkoituksenmukaisesti siten, että välillä kamera kuvasi koko luokkaa sekä yhteistä opetustuokiota, kun taas välillä se kuvasi yksittäisen parin tai ryhmän työskentelyä. Tällöin kyseessä oli yleensä jokin toiminnallisempi harjoitus, kuten lukumääräpalojen tai lukujonokorttien kanssa työskentely. Lisäksi oppilailta kerättiin kaikki jakson aikana tehdyt tehtävämonisteet ja heille pidettiin jakson lopuksi koe (ks. liite 7(3–4)), joka oli merkittävässä roolissa oppimateriaalin pätevyyden arvioinnissa. Joka viikon viimeisellä tunnilla oppilailta kerättiin myös kirjallinen viikkopalaute (ks. liite 2) ja jakson lopuksi he vastasivat vielä koko jaksoa koskevaan kyselylomakkeeseen (ks. liite 1), jonka toinen puoli koostui Likert-asteikollisista väittämistä ja toinen puoli vapaamuotoisemmista kysymyksistä. Tunnilla tehtyjen omien havaintojeni muistamiseksi pidin vielä omaa havaintopäiväkirjaa, johon kirjoitin jokaisen tunnin jälkeen omat havaintoni ylös.

Oppimateriaalin arviointi tehtiin kaiken kerätyn aineiston analysoinnin perusteella. Aineiston analyysi toteutettiin sisällönanalyysina sekä kvantitatiivisena kuvailuna, ja sen etenemisestä kerrotaan tarkemmin seuraavassa luvussa 7.2. Analyysin myötä aineistosta etsittiin sekä oppitunneilla esiintyneitä että tehtävämonisteista löytyviä tyypillisiä ongelmakohtia. Näitä ongelmakohtia ja

virheitä arvioitiin suhteessa oppimateriaaliin arvioiden olisiko siinä jotain parannettavaa, jotta tällaisilta virheiltä ja ongelmilta välttyttäisiin. Myös jakson lopussa pidetyssä kokeessa esiintyviä virheitä arvioitiin suhteessa oppimateriaaliin. Näin analyysin myötä lopulta löydettiin oppimateriaalille monia kehittämistarpeita. Oppimateriaalin kehittämisprosessi testauksineen ja arviointineen esitetään luvussa 8 ja luvussa 10 esitellään, miten analyysissa löytyneitä kehittämiskohteita lähdettiin parantamaan ja millainen oppimateriaalista lopulta muotoutui jatkokehitysvaiheen jälkeen.

## *7.2 Aineiston käsittely ja analysointi*

Kehittämistutkimukselle tyypilliseen tapaan (ks. luku 2) tässä tutkimuksessa toteutuu aineistoon liittyvä triangulaatio. Aineistoa on kerätty monella eri tavalla kuten videoimalla oppitunteja, teettämällä oppilailla kyselylomakkeita sekä keräämällä kaikki oppilaiden tekemät tehtävämonisteet ja kokeet talteen, jotta niitä voidaan myöhemmin tarkastella lisää. Koska aineisto kokonaisuudessaan on hyvin monimuotoinen, mutta kuitenkin lopulta suurin osa siitä taipuu tekstimuotoon, on sisällönanalyysi siihen sopiva analyysitapa. Toisaalta esimerkiksi Bauerin (2011, 136) mukaan samoja käsittelytapoja voidaan soveltaa myös kuvien analysointiin, joten sisällönanalyysia voi hyvin soveltaa myös tehtävämonisteiden ja kokeiden tehtävien analysoinnissa.

Sisällönanalyysia voidaan pitää perusanalyysimenetelmänä, jota voidaan hyödyntää kaikissa laadullisen tutkimuksen perinteissä. Sillä on kuitenkin kaksi eri merkitystä, koska sitä voidaan pitää joko yksittäisenä metodina tai laajempänä ja väljänä teoreettisena kehyksenä. Väljän teoreettisen kehyksen näkökulmasta useimpien laadullisen tutkimuksen analyysimenetelmien voidaan katsoa perustuvan sisällönanalyysiin, mikäli sisällönanalyysilla tarkoitetaan kirjoitettujen, kuultujen tai nähtyjen sisältöjen analyysia. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 91.) Tässä tutkimuksessa sisällönanalyysia sovelletaan yksittäisen analyysimenetelmän näkökulmasta.

Sisällönanalyysin tarkoituksena on saada tutkittavasta ilmiöstä tiivistetty ja yleisessä muodossa oleva kuvaus (Tuomi & Sarajärvi 2009, 103). Schreierin (2013, 170–171) mukaan sisällönanalyysilla on kolme ominaispiirrettä, jotka ovat aineiston pienentäminen, systemaattisuus ja joustavuus. Usein kvalitatiivisissa tutkimuksissa aineiston määrä on niin suuri, että sitä on hankala käsitellä. Sisällönanalyysissa aineistoa koodataan ja luokitellaan niin, että aineisto lopulta supistuu sellaiseksi, että sitä pystytään käsittelemään. Sisällönanalyysin systemaattisuus näkyy siinä, että ensinnäkin menetelmä vaatii, että tutkimuksessa käytettävän materiaalin jokainen osa, joka on tutkimustehtävän kannalta oleellinen, tutkitaan huolellisesti läpi. Toiseksi analyysiprosessi etenee systemaattisesti eri vaiheissa ja usein tämä prosessi on iteratiivinen, sillä monet vaiheet toistetaan uudelleen tehden



parannuksia. Menetelmän joustavuus taas ilmenee siinä, että tyypillisesti sisällönanalyysissa aineistoa tarkastellaan sekä aineistolähtöisesti että teorialähtöisesti. (Schreier 2013, 170–171.)

Eskola (2015, 188–189) on esittänyt analyysin teon etenemiseen kolme eri vaihtoehtoa, jotka ovat aineistolähtöinen, teorialähtöinen sekä teoriasidonnainen sisällönanalyysi. Erottavana tekijänä näille kolmelle on se, minkälainen rooli teorialla on analyysinteon vaiheessa. Aineistolähtöisessä analyysissä pyritään luomaan teoreettinen kokonaisuus tutkimusaineistosta. Analyysissä ei siis käytetä mitään valmista teoriaa tai valmiita käsitteitä, joiden pohjalta aineistoa aletaan tarkastella, vaan analyysiyksiköt nousevat aineistosta. Kaikki aikaisempi tieto pyritään sulkemaan analyysin ulkopuolelle niin, ettei sillä olisi vaikutusta analyysiin. Salon (2015, 172) mukaan tällainen puhdas aineistolähtöisyys on kuitenkin käytännössä täysin mahdotonta, sillä analyysia ohjaavat aina tutkijan esioletukset, ajatukset ja teoreettiset ideat. Teorialähtöinen analyysi taas on päinvastainen, sillä siinä analyysi nojaa johonkin valmiiseen teoriaan tai malliin. Tutkimusaineistoa kuvaillaan ja testataan siis valmiin mallin tai valmiiden käsitteiden pohjalta. Teoriaohjaavaa analyysia taas voi pitää näiden kahden välimuotona. Siinä teoria ohjaa analyysin etenemistä, mutta analyysi ei kuitenkaan pohjautu suoraan teoriaan vaan se lähtee liikkeelle aineistosta itsestään. Teorian rooli on ohjata analyysia ja sillä on vaikutusta siihen, mitä aineistosta nousee, mutta teoriaohjaava analyysi ei kuitenkaan ole teoriaa testaavaa. Siinä tutkijan analyysiprosessissa ikään kuin vaihtelevat aineistolähtöisyys ja valmiit mallit. (Eskola 2015, 188–189; Tuomi & Sarajärvi 2009, 95–97.)

Tässä tutkimuksessa on kyse pikemminkin aineistolähtöisestä kuin teorialähtöisestä analyysistä, sillä analyysin myötä aineistosta on tarkoitus löytää kehittämiskohteita oppimateriaalille. Aineistoa ei kuitenkaan tarkastella minkään ennalta määrätyn teorian mukaisesti, vaan sitä pyritään tarkastelemaan avoimin silmin. Kuitenkin aineisto sinällään pohjautuu jo teoriaan, sillä aineistona olevien oppituntien sisältö sekä tehtävämonisteet ja muut harjoitukset, jotka toimivat analyysin tarkastelun pohjana, on suunniteltu luvuissa 3, 4 ja 5 esitelyihin teorioihin pohjautuen, joten ne ovat vaikuttaneet jo aineiston syntyvaiheessa. Siten teoria kulkee toisaalta myös analyysissä mukana, sillä kuten Salo (2015, 172) mainitsee, ei puhdas aineistolähtöisyys ole koskaan täysin mahdollista, sillä tutkijan ajatukset ja teoreettiset ideat ohjaavat sitä joka tapauksessa. Niin myös tässä tutkimuksessa, joten tutkimuksen analyysia kuvaa oikeastaan teoriasidonnainen analyysi, sillä aineistoa pyritään tarkastelemaan välillä avoimesti mahdollisimman aineistolähtöisesti mutta välillä taustalla vaikuttaneet teoriat ohjaavat tekemään aineistosta niiden mukaisia havaintoja.

Sisällönanalyysi sopii kehittämistutkimukseeni hyvin myös analyysin tavoitteen kannalta. Kun analysoidaan kehitetyn materiaalin testausvaiheessa kerättyä aineistoa, analyysin tarkoituksena on selvittää, millaisia kehityskohteita kehitetystä materiaalista löytyy. Tarkoituksena on siis selvittää, millaiset tekijät materiaalissa olivat toimivia ja edistivät oppilaiden oppimista ja millaiset asiat taas

olivat solmukohtia eivätkä tukeneet oppimista kunnolla. Kun aineistoa on hyvin paljon ja se on monipuolista, saadaan sitä sisällönanalyysin kautta luokiteltua ja tiivistettyä pienemmäksi, jolloin sitä on helpompi käsitellä ja siitä pystyy paremmin tekemään johtopäätöksiä.

Tutkimuksen analyysi jakaantuu moneen osaan, sillä aineisto koostuu monista eri materiaaleista. Analyysin rakenteen voikin jakaa kolmeen osaan sen perusteella, kenen näkökulmasta oppimateriaalia pystytään arvioimaan eri aineistojen kohdalla. Eri näkökulmiksi muotoutui lopulta oppisisältöjen oppimisen näkökulma, tutkivan opettajan eli minun näkökulmani sekä oppilaiden näkökulma. Analyysin ensimmäisessä osassa arvioidaan oppimateriaalia oppisisältöjen oppimisen näkökulmasta ja analyysin aineistona ovat oppilaiden opetusjakson päätteeksi tekemät kokeet. Kokeissa oli viittä erilaista tehtävätyyppiä, mutta koska osalla tehtävistä testattiin usean eri asian osaamista, oli analyysissa tarkoituksenmukaisempaa keskittyä siihen, millaisia virheitä oppilaat olivat tehneet kokeessa. Poimin siis kokeista oppilaiden tekemiä virheitä ja päädyin lopulta luokittelemaan ne neljään eri luokkaan virheen laadun perusteella. Eri virhetyyppejä olivat mekaaniset laskuvirheet, huolimattomuusvirheet, oman sanallisen tehtävän keksimisen virheet sekä laskun muodostamisen virheet. Lopulta laskin vielä prosenttiluvut siitä, miten paljon mitäkin virhetyyppiä esiintyi kokeissa yhteensä. Kokeiden lisäksi oppisisältöjen oppimisen näkökulmaa varten oppilailta kerättiin talteen kaikki tehtävämonisteet, jotka he tekivät jakson aikana. Monisteita kertyi erittäin paljon, joten niiden systemaattinen analysointi ei tämän tutkimuksen puitteissa olisi ollut tarkoituksenmukaista. Otin kuitenkin tämänkin aineiston tarkastelun kohteeksi katsoen jokaisen monisteen läpi etsien niistä kehittämiskohteita. Tämän oppisisältöjen oppimisen näkökulman tulokset on esitelty luvussa 8.3.1.

Analyysin toisessa osassa tarkastellaan tutkivan opettajan näkökulmaa oppitunnilla kuvattujen videoiden sekä oppituntien jälkeen kirjoitetun havaintopäiväkirjan perusteella. Tämä analyysin osa lähti liikkeelle siitä, että litteroin kaikki 29 oppitunneilla kuvattua videota. Koska videoiden määrä oli niin suuri, eikä kaikki niissä näkyvä materiaali ollut relevanttia tutkimustehtäväni kannalta, päätin toteuttaa harkitsevaa litterointia. Litteroin videoista siis vain tutkimuksen kannalta mielenkiintoiselta ja tärkeältä tuntuvat kohdat, jolloin sain karsittua aineistoa hieman pienemmäksi. Kuitenkin myös tällä tavalla litteroitua tekstiä syntyi noin 80 sivua, joten karsiminen oli edelleen tarpeellista. Seuraavalla lukukierroksella pyrin etsimään teksteistä mielenkiintoisia kohtia oppimateriaalin tehtävien ja oppimisen kannalta. Kolmannella lukukierroksella päädyin valitsemaan itselleni ongelmanäkökulman, ja poimin litteroiduista teksteistä kaikki kohdat, joissa oppilaiden toiminnassa ilmeni virheitä tai heillä oli ongelmia jonkin tehtävän tai oppisisällön parissa. Lisäksi poimin kohtia, joissa jokin tehtävä ei vaikuttanut toimivalta oppimisen kannalta. Lopulta päädyin luokittelemaan nämä kohdat neljään eri luokkaan, jotka kuvaavat sitä, minkälaisia ongelmakohtia oppimateriaalin

yhteydessä ilmeni opetusjakson aikana. Nämä neljä luokkaa olivat käsitteeseen liittyvät ongelmat, laskustrategioihin liittyvät ongelmat, kertotauluihin liittyvät ongelmat sekä yksittäisiin tehtäviin liittyvät ongelmat. Litteroitujen videoiden yhteydessä tarkastelin myös havaintopäiväkirjaani, sillä nämä kaksi aineiston osaa täydensivät hyvin toisiaan. Toimin havaintopäiväkirjan tekstin kanssa samojen periaatteiden mukaisesti kuin edellä esiteltyjen litteroitujen tekstien kanssa ja luokittelin myös ne lopulta samoihin luokkiin. Luokat ja havainnot on esitelty tarkemmin luvussa 8.3.2 ja ne edustavat oppimateriaalin arvioinnissa omaa näkökulmaani eli tutkivan opettajan näkökulmaa.

Litteroitujen videoiden, päiväkirjatekstin ja monisteiden sekä kokeiden lisäksi aineistona oli myös oppilailla teetetyt viikoittain täytetyt kyselylomakkeet (ks. liite 2) sekä koko jaksoa koskeva kyselylomake (ks. liite 1), joilla oli tarkoitus selvittää tarkemmin oppilaiden mielipidettä ja näkökulmaa oppimateriaalista ja koko jaksosta. Analyysin kolmannessa osiossa siis tarkasteltiin oppilailla teetettyjä kyselylomakkeita ja tämä oppilaiden näkökulma on esitelty luvussa 8.3.3. Joka viikon lopuksi kerättyjen lomakkeiden analysointi toteutui osittain laadullisena sisällönanalyysina, sillä lomakkeiden avoimista vastauksista pyrittiin löytämään esimerkiksi yhtäläisyyksiä tai merkittäviä eroja. Lomakkeessa oli kuitenkin myös kohta, jossa oppilaat valitsivat rastilla omaa mielipidettä kuvaavan kohdan valmiista vaihtoehdoista. Laadullisen tarkastelun lisäksi näitä kohtia analysoitiin myös määrällisesti eli tehtiin sisällön erittelyä.

Tuomen ja Sarajärven (2009, 105–106, 120–121) mukaan sisällön erittely on aineiston kvantitatiivista kuvailua, kun taas sisällönanalyysi on aineiston sisällön kuvailua sanallisesti. Sisällön erittely, jota voisi kuvailla myös aineiston kvantifioinniksi, saattaa usein tuoda erilaista näkökulmaa aineistoon sisällönanalyysin jälkeen. Myös Schreier (2013, 173, 180) tarkastelee sisällönanalyysin laadullisuutta ja määrällisyyttä tulosten näkökulmasta. Hänen mukaan laadullisen sisällönanalyysin kautta saatuja tuloksia voidaan esitellä myös kvantitatiivisin keinoin. Kvantitatiivisten keinojen käyttö analyysissa onkin yksi piirre, joka erottaa sisällönanalyysin muista laadullisen analyysin menetelmistä. Toisaalta laadulliset aineistot ovat usein niin pieniä, ettei kvantifiointi välttämättä tuo mitään lisätietoa tutkimustuloksiin (Tuomi & Sarajärvi 2009, 120–121). Tässä tutkimuksessa aineisto oli niin pieni, ettei sitä kannattanut lähteä tarkastelemaan varsinaisten kvantitatiivisten analyysitapojen keinoin. Sisällön erittely määrällisesti oli kuitenkin luonteva ja järkevä vaihtoehto, sillä määrällinen erittely toi lisää tietoa siitä, kuinka moni oppilas oli samaa mieltä ja miten mielipiteet tehtävistä jakaantuivat eri tehtävien kohdilla. Määrällisen erittelyn kautta saatiin selville myös se, mistä tehtävistä luokassa oltiin pidetty eniten ja toisaalta mitkä tehtävät eivät olleet tuntuneet heistä niin mielekkäiltä.

Koko jaksoa koskevan lomakkeen toinen puoli koostui avoimista kysymyksistä, joten niitä tarkasteltiin sisällönanalyysin keinoin etsimällä samankaltaisuuksia ja eroja sekä etsimällä

vastauksista merkittäviä yhteyksiä. Kaksi kysymystä liittyi jakson aikana tehtyihin tehtäviin ja harjoituksiin, sillä niissä kysyttiin koko jakson mukavinta ja ikävintä tehtävää sekä perusteluja valinnalle. Näitä tarkastellaan analyysissa yhdessä viikkopalautteiden kanssa, sillä myös niissä oli kaksi samankaltaista kysymystä koskien kyseisen viikon aikana tehtyjä tehtäviä ja harjoituksia.

Lomakkeen toinen puoli taas koostui erilaisista väittämistä, joihin vastattiin neliportaisella, yksinkertaistetulla Likert-asteikolla. Metsämuurosen (2008, 70) mukaan Likert-asteikkoa käytetään tyypillisesti mittareissa, joilla kuvataan esimerkiksi asennetta tai motivaatiota. Asteikon avulla tutkittava arvioi käsitystään väitteen tai kysymyksen sisällöstä. Tässä tutkimuksessa tutkittavat arvioivat käsityksiään väitteistä, jotka koskivat matematiikan ja kertolaskujen opiskelua. Tyypillisesti Likert-asteikon skaala koostuu ääripäistä, jolloin asteikon toinen pää tarkoittaa vastaajan olevan täysin samaa mieltä väitteen kanssa ja asteikon toinen pää tarkoittaa vastaajan olevan täysin eri mieltä (Metsämuuronen 2008, 70). Alun perin Likert-asteikossa oli seitsemän vastausvaihtoehtoa, mutta nykyisin käytetään myös viisi- ja yhdeksänportaisia asteikkoja, ja viisiportainen asteikko on niistä tyypillisin. Joskus käytetään myös parillisia asteikkoja, jolloin neutraali keskikohta on jätetty pois. Tätä perustellaan sillä, että vastaajalla tulisi olla mielipide ja että vastaajat ottavat silloin asiaan paremmin kantaa. Se on kuitenkin hieman kyseenalaista tulosten tulkinnan kannalta. (Valli 2015, 98–99.) Metsämuurosen (2008, 112) mukaan mittarin olisi hyvä olla vähintään neliportainen.

Tässä tutkimuksessa vastaajina olivat toisen vuosiluokan oppilaat, joten kyselylomakkeesta haluttiin tehdä mahdollisimman yksinkertainen, jotta oppilaat pystyisivät vastaamaan siihen tarkoituksenmukaisesti. Sen vuoksi numerollinen Likert-asteikko muokattiin hymiöiden muotoon ja hymiöiden merkitykset käytiin oppilaiden kanssa huolellisesti läpi ennen lomakkeen täyttööä pohtimalla yhdessä, mitä esimerkiksi eniten hymyilevä hymiö ja toisaalta kaikkein surullisin hymiö tarkoittavat jonkin tietyn lomakkeessa olevan väittämän kohdalla. Lisäksi kyseenalaisuudesta huolimatta skaalasta tehtiin parillinen sen vuoksi, että neutraalin keskikohdan vastaaminen ei houkuttaisi oppilaita liikaa ja toisaalta myös siksi, että asteikko olisi oppilaiden näkökulmasta tällä tavalla yksiselitteisempi. Tämä kyselylomakkeen Likert-asteikollinen puoli analysoitiin määrällisesti laskemalla valittujen vastausvaihtoehtojen määrät eri kysymysten kohdalla. Koska vastaajien määrä on suhteellisen pieni ( $n=24$ ), ei tässä tapauksessa ollut tarkoituksenmukaista tehdä tarkempaa kvantitatiivista analysointia.

Lopuksi analyysin eri osat pyritään kokoamaan yhteen tarkastelemalla niitä rinnakkain ja etsien niiden perusteella tarkoituksenmukaisia kehittämiskohteita oppimateriaalille. Samalla analyysin tuloksia tarkastellaan rinnakkain tutkimuksen teoriataustan kanssa. Tämä yhteenveto on nähtävillä luvussa 9.

# 8 KERTOLASKUN OPPIMATERIAALIN ENSIMMÄINEN VERSIO

Tässä luvussa kuvaan kokonaisuudessaan oppimateriaalin kehittämisprosessin, joka koostuu oppimateriaalin suunnittelusta ja kehittämisestä, testaamisesta (ks. luku 7.1) ja arvioinnista. Ensiksi luvussa 8.1 esittelen, mitkä tekijät ovat olleet materiaalin suunnittelun taustalla ja vaikuttaneet siten sen kehittämiseen. Seuraavaksi luvussa 8.2 esitän kuvauksen oppimateriaalin tehtävistä ja harjoituksista. Ne on oppimateriaalissa jaoteltu neljään eri kategoriaan sen mukaan, mitä niissä on tarkoitus harjoitella, joten tässä kuvauksessa esittelen, minkä tyyppisiä tehtäviä ja harjoituksia mihinkin kategoriaan sisältyy. Lopuksi luvussa 8.3 esittelen aineiston analyysin tulokset, jotka toimivat pohjana oppimateriaalin arvioinnille. Ensin käsittelen oppimateriaalia oppisisältöjen oppimisen näkökulmasta, jolloin aineistona ovat jakson lopuksi pidetty koe sekä koko jakson tehtävämonisteet. Sen jälkeen käsittelen oppimateriaalia tutkivan opettajan näkökulmasta, jolloin aineistona ovat oppitunneilla kuvatut videot sekä havaintopäiväkirja. Viimeisenä käsittelen oppimateriaalia oppilaiden näkökulmasta, jossa aineistona ovat oppilailla teetetyt kyselylomakkeet.

## *8.1 Suunnittelu ja kehittäminen*

Oppimateriaalin kehittämisen lähtökohdiksi valikoituivat ongelma-analyysin myötä vuonna 2014 julkaistut Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, kielentäminen sekä Solmu-ohjelman lukumääräpalat. Lisäksi kehittämisen taustalla otettiin huomioon aikaisempaa tutkimuskirjallisuutta suomalaisiin matematiikan oppimateriaaleihin liittyen sekä erityisesti aikaisempia tutkimuksia kertolaskun opetuksesta ja oppimisesta. Vaikka oppimateriaalin suunnittelu ja sen testaus ajoittuivat syksyyn 2015, käytettiin materiaalin suunnittelussa uusia Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita (2014), vaikka vanha opetussuunnitelma (2004) oli vielä käytössä. Koska uudet Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet olivat jo olemassa, haluttiin materiaalissa katsoa jo eteenpäin, jolloin lopullinen oppimateriaali on kehittämisprosessin jälkeen jo valmiiksi ajan tasalla opetussuunnitelman suhteen.

Opetussuunnitelmasta poimittiin oppimateriaalin sisällöksi kertolaskun käsite sekä kertotaulut 1–5 ja 10. Lisäksi yhdeksi keskeiseksi aiheeksi opetussuunnitelmasta tuli kertolaskun

vaihdannaisuuden hyödyntäminen. Nämä kolme asiaa ovat Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueen alla. Niiden lisäksi opetussuunnitelma ohjaa luomaan pohjaa jakolaskun ymmärtämiselle sekä kerto- ja jakolaskun yhteydelle ja tutustumaan kertolaskun liitännäisyyteen. (Opetushallitus 2014, 129.) Nämä kaksi aihetta jätettiin kuitenkin vielä tämän oppimateriaalin ulkopuolelle, sillä jos oppimateriaali olisi ollut vielä laajempi, ei sen testaaminen käytännön syistä olisi tässä tilanteessa ollut mahdollista. Kuitenkin testaamisvaiheessa mukana olleen luokan oppikirja ohjasi opettamaan vielä yhdistettyjä laskutoimituksia, joissa on mukana myös yhteenlasku kertolaskun rinnalla, joten se aihe päätettiin ottaa myös kehitettävään oppimateriaaliin mukaan.

Vaikka opetussuunnitelma ei erityisesti ohjannut kertolaskua opettavaksi yhteenlaskun kautta, valittiin se kuitenkin lähtökohdaksi tähän oppimateriaaliin. Vaikka kertolaskun käsitteen perustasta onkin olemassa erilaisia näkemyksiä, on yhteenlaskun kautta opettaminen kuitenkin ollut suomalaisessa opetuksessa sekä monissa muissakin maissa kertolaskun käsitteen opettamisen lähtökohtana. (ks. luku 5.1.) Sen vuoksi yhteenlasku haluttiin ottaa myös tässä oppimateriaalissa kertolaskun käsitteen ymmärtämisen perustaksi.

Konkretian ja toiminnallisuuden hyödyntäminen olivat myös keskeisiä tekijöitä, jotka tulivat oppimateriaalin suunnitteluun mukaan Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista. Koska opetussuunnitelma ohjaa tarjoamaan monipuolisia kokemuksia käsitteiden ja rakenteiden perustaksi sekä kehittämään oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan eri tavoin, valittiin materiaalin suunnittelun taustalle juuri kielentäminen sekä Solmu-ohjelman lukumääräpalat. (Opetushallitus 2014, 128.) Molemmissa pedagogisissa lähestymistavoissa, sekä kielentämisessä että Solmu-ohjelmassa korostetaan sitä, että opetuksessa täytyy lähteä liikkeelle konkreettisista kokemuksista, mikä on tärkeää kehitetyssä oppimateriaalissa, sillä se suunniteltiin toisen vuosiluokan oppilaille, joiden ajattelu ei ole vielä abstraktilla tasolla (Piaget & Inhelder 1977, 126; Risku 2002, 115–116). He siis tarvitsevat vielä konkreettisia kokemuksia ymmärtääkseen asioita, joten konkreettisten toimintavälineiden hyödyntäminen oli yhtenä tärkeimpänä lähtökohtana oppimateriaalin suunnittelussa.

Kielentämisen periaatteen mukaisesti oppimateriaali kehitettiin siten, että siinä hyödynnetään kaikkia neljää eri kieltä eli luonnollista kieltä, kuviokieltä, matematiikan symbolikieltä sekä taktiilista toiminnan kieltä (ks. luku 4.1). Ensinnäkin luonnollisen kielen käyttö ja erityisesti suullinen kielentäminen eri tehtävissä johtaa vuorovaikutukseen, jonka myötä sekä oppilas itse että myös muut oppilastoverit pääsevät jäsentämään omaa ajatteluaan. Toisaalta myös opettaja näkee tällöin, onko esimerkiksi kertolaskun käsitettä oikeasti ymmärretty vai onko siitä tullut vain mekaaninen laskutoimitus. Taktiilisen toiminnan kielen käytön myötä opetus saadaan vietyä aina konkreettiselle

tasolle, joten toimintamateriaalien käyttö otettiin yhdeksi tärkeäksi lähtökohdaksi materiaalin suunnittelussa. Oppimateriaali rakennettiin siten, että uutta asiaa tutkitaan aina ensin konkreettisten välineiden sekä luonnollisen kielen avulla, jonka jälkeen kuviokielen kautta siirrytään matematiikan symbolikieleen. Näin käsitteestä jää oppilaalle moniulotteinen kokemus, jonka myötä pienen oppilaan on helpompi ymmärtää opeteltavana oleva asia.

Tässä oppimateriaalissa erityisenä toimintamateriaalina on Solmu-ohjelman lukumääräpalat (ks. luku 4.2), jotka toimivat materiaalissa kertolaskun käsitteen ymmärtämisen tukemisessa. Lukumääräpalat soveltuvat kertolaskun havainnollistamiseen hyvin, sillä palat koostuvat valmiiksi lukumäärästä eli on olemassa esimerkiksi lukumäärää kolme kuvaava yksittäinen pala. Tällöin korostuu se, että kertolaskussa on kyse keskenään samankokoisista ryhmistä, joita on useampi, sillä palojen avulla voidaan konkreettisesti ottaa esimerkiksi laatikosta yhden kerran kolme, jolloin kolme on suoraan yksittäisenä ryhmänä, eikä sitä ensin erikseen rakenneta kolmesta yksittäisestä palasta. Esimerkiksi lasku  $2 \cdot 3$  voidaan lukumääräpaloilla rakentaa niin, että suoritetaan kaksi toimintoa: otetaan yhden kerran kolme ja toisen kerran kolme. Näin kertolaskun idea eli samankokoisten ryhmien laskeminen konkretisoituu. Jos laskettaisiin esimerkiksi helmien tai palikoiden avulla, täytyisi yksittäisistä helmistä tai palikoista aina muodostaa ensin kolmen ryhmiä ja vasta sen jälkeen lopputuloksena voisi olla kaksi kertaa kolme. Lisäksi lukumääräpalat ovat myös hyvin pelkistettyjä välineitä, joissa ei ole mitään tarkoituksettomia ja ylimääräisiä ominaisuuksia, mikä on Laskin ja hänen kollegoidensa (2015, 5) mukaan yksi tärkeä tekijä siinä, että toimintamateriaalit edistäisivät mahdollisimman hyvin oppimista.

Lukumääräpalojen valinta tutkimuksen toimintamateriaaliksi vaikutti tarkoituksenmukaiselta myös sen vuoksi, että tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat koko ensimmäisen luokan ajan opiskelleet matematiikkaa näiden välineiden avulla. Lukumääräpalat olivat siis oppilaille entuudestaan ja hyvin tuttuja ja he olivat tottuneet työskentelemään niiden parissa. Koska oppilaat olivat päässeet niiden avulla opiskellessaan hyviin oppimistuloksiin, ei ollut syytä jättää niitä opetuksesta pois kertolaskunkaan yhteydessä, kun välineet soveltuivat ominaisuuksiensa puolesta hyvin myös kertolaskun havainnollistamiseen.

Toimintamateriaalien käytön lisäksi toiseksi tärkeäksi lähtökohdaksi valittiin luonnollisen kielen runsas käyttö opetuksessa. On tärkeää, että tehtävistä puhutaan luokassa ja niiden ratkaisuihin keskustellaan. Sosiokonstrukttiivisen oppimiskäsityksen mukaan oppiminen toteutuu juuri vuorovaikutuksessa toisten kanssa (Kauppila 2007, 48). Puheen lisäksi myös kirjoitettu luonnollinen kieli on otettu tehtäviin mukaan. Aluksi ei esimerkiksi käytetäkään kertomerkkiä, vaan sen tilalle kirjoitetaan sana ”kertaa”. Näin kertomerkin merkitys selkiintyy oppilaalle ensin kielen kautta. On myös tärkeää, että oppilaat selostavat toimintaansa toisilleen, sillä siten käsitteet muuttuvat

selkeämmiksi (Ikäheimo & Risku 2004, 228). Materiaalissa otettiin huomioon se, että tehtävistä keskustellaan yhteisesti samalla, kun niitä tehdään esimerkiksi välineiden tai kuvien avulla. Joskus keskustelu voidaan toteuttaa vasta tehtävän jälkeen. Riskun (2002, 119) mukaan oppilaiden kommentit, kysymykset, perustelut ja selitykset ovat merkityksellisiä oppimisprosessin kannalta. Usein onkin niin, että lapsi ymmärtää vertaisensa selitystä paremmin kuin opettajan. Myös Opetushallitus on pitkittäistutkimuksessaan todennut hyödylliseksi sen, että oppilaat neuvovat toisiaan ja selittävät omia ratkaisujaan toisille oppilaille. Tutkimuksesta tehdyissä johtopäätöksissä todetaankin, että tällainen menettely olisi hyödyllistä sekä sellaisille oppilaille, jotka omaksuvat asioita nopeasti että sellaisille, joilla oppiminen on hitaampaa. Tämän mukaan kielentäminen olisi siis hyödyksi kaikille oppilaille. (Joutsenlahti & Kulju 2015, 61; Metsämuuronen 2013b, 11.)

Taktiilisen toiminnan kielen eli toimintamateriaalien hyödyntämisen sekä luonnollisen kielen käytön lisäksi oppimateriaalin kehittämisen yhtenä lähtökohtana oli kuviokielen hyödyntäminen. Kuviokielellä tarkoitetaan matemaattisten asioiden kuvaamista erilaisin kuvioin tai piirroksin (Joutsenlahti 2009, 76). Materiaalissa käytettiin valmiita kuvia ja kuvioita ymmärtämisen tukena ja lisäksi oppilaat pääsevät tehtävissä myös itse piirtämään kuvioita laskuista. Kuviot toimivat siis toisaalta ymmärtämisen tukena ja toisaalta oman osaamisen osoittamisen välineenä. Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ohjaavat arvioinnin osalta, että oppilailla tulisi olla mahdollisuus osoittaa osaamistaan eri tavoin ja osaamisen tasoa voidaan selvittää esimerkiksi puheen, toimintavälineiden ja piirtämisen avulla (Opetushallitus 2014, 130). Kuviokieltä hyödynnetään oppimateriaalissa oppilaan osaamisen osoittamiseen sekä oppitunneilla tehtävissä tehtävämonisteissa että jakson lopussa pidettävässä kokeessa. Oppimateriaalissa päädyttiin siihen, että jakson alussa käytettiin kuvia ja jakson loppuvaiheessa sanallisten tehtävien yhteydessä oppilaita ohjattiin käyttämään pelkistettyjä kuvioita, sillä kunnollisten kuvien piirtämiseen käytetty aika haluttiin hyödyntää tarkoituksenmukaisemmin.

Koodinvaihtoa neljän eri kielen välillä voidaan toteuttaa opetuksessa sekä pedagogisena mallina että ymmärtävän oppimisen mallina (Joutsenlahti & Kulju 2015, 66–67). Kehitetty oppimateriaali suunniteltiin niin, että se hyödyntää molempia tapoja. Pedagogista mallia hyödynnetään yleensä opettajajohtoisissa opetustuokioissa, kun pyritään tekemään oppilaille ymmärrettäväksi esimerkiksi kertolaskun käsite tai vaihdannaisuuden periaate taktiilisen toiminnan kielen ja kuviokielen avulla. Ymmärtävää oppimisen mallia hyödynnetään itsenäisissä tehtävissä tai parityöskentelyssä, kun tehtävissä täytyy esimerkiksi muuttaa kuviokielellä annettu lasku matematiikan symbolikielelle tai toisin päin.

Lisäksi oppimateriaalin tehtävissä ja harjoituksissa painottuu parityöskentely, mikä on ensinnäkin perusteltua Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan. Sen mukaan



matematiikan yhtenä tehtävänä on kehittää viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja, ja oppilaiden tulisi tottua työskentelemään itsenäisen työskentelyn lisäksi myös yhdessä toisten kanssa. (Opetushallitus 2014, 128, 130.) Nämä taidot korostuvat erityisesti parityöskentelyssä. Toiseksi parityöskentely on perusteltua myös kielentämisen näkökulmasta, sillä suullisen kielentämisen kautta oppilaat voivat selventää omaa ajatteluaan ja verrata sitä toisen ajattelutapoihin (ks. luku 4.1.1). Sillä, että oppilaat selittävät omia ratkaisujaan toisilleen ja neuvovat toisiaan on myös Opetushallituksen toteuttaman tutkimuksen perusteella todettu olevan myönteinen vaikutus oppimiseen (Hannula & Oksanen 2013, 272–273). Parityöskentelyssä tällainen keskustelu on luonnollista ja voi tapahtua myös spontaanisti.

Sisällöllisesti oppimateriaalista pyrittiin rakentamaan käsitteen ymmärtämistä painottava kokonaisuus niin, että esimerkiksi kertotaulut eivät jäisi vain mekaanisiksi ulkomuistinvaraisiksi laskuiksi ja niiden tuloksiksi. Materiaalin avulla pyrittiin painottamaan sitä, että oppilaat ymmärtäisivät kertotaulut systemaattisina kokonaisuuksina. Tehtävissä painotettiin sitä, miten kertotaulujen vastauksia pystyy hakemaan käyttämällä muita ulkoa opittuja tuloksia apuna. Myös kertolaskun vaihdannaisuuden opettamisessa pyrittiin materiaalisissa korostamaan ymmärrystä siitä, että vaikka laskujen tulos on sama, tarkoittaa lasku kuitenkin eri asiaa. Tähän haluttiin kiinnittää erityisesti huomiota, sillä esimerkiksi Ikäheimon ja kollegoiden (2004, 18) mukaan vaihdannaisuuden oppimisen vaarana voi olla juuri se, että oppilaat eivät ymmärrä enää kirjoitusjärjestyksellä olevan merkitystä, kun tulo on sama.

## ***8.2 Kuvaus sisällöstä ja rakenteesta***

Oppimateriaalin tehtävät ja harjoitukset voidaan jakaa neljään eri kategoriaan sen mukaan, mitä niissä harjoitellaan. Tässä materiaalisissa tehtävillä tarkoitetaan kirjallisia monisteita ja tehtäviä, kun taas harjoituksilla viitataan toiminnallisiin harjoituksiin. Ensimmäisen kategorian tehtävien ja harjoitusten tavoitteena on saada oppilaat ymmärtämään, mitä kertolaskun käsitteellä tarkoitetaan. Toisen kategorian tehtävät ja harjoitukset koskevat kertotauluja. Monet niistä on suunniteltu siten, että niitä voidaan soveltaa eri kertotaulujen harjoitteluun. Samanlainen tehtävä tai harjoitus siis toistuu eri kertotaulujen kohdalla, mutta sen sisältö on muokattu vastaamaan harjoiteltavana olevaa kertotaulua. Kolmannen kategorian tehtävät ja harjoitukset liittyvät kertolaskun vaihdannaisuuteen sekä laskutoimituksiin, joissa yhdistetään kertolaskun kanssa yhteenlasku tai vähennyslasku. Neljäs kategoria koostuu koko jakson aikana opittuja asioita käsittelevästä kertaamonisteesta sekä jakson loppukokeesta. Oppimateriaali on kokonaisuudessaan esillä liitteissä 3–7 näihin neljään edellä mainittuun kategoriaan jaoteltuna.

Ensimmäisen kategorian tehtävissä ja harjoituksissa kertolaskun käsitteen pohjustaminen aloitetaan yhtä suurten lukujen yhteenlaskun kautta konkreettisesti omenakuvakorteilla laskien, ja lopuksi erilaisia kuvia hyödyntäen. Myös lukumääräpalat ja niiden mukaisesti piirretyt kuviot ovat keskeisessä roolissa käsitteen ymmärtämisen oppimisen vaiheessa. Aluksi liikkeelle lähdetään vain luonnollisella kielellä mutta melko pian otetaan käyttöön matematiikan symbolikielen kertomerkki. Ensimmäisen kategorian tehtävissä ja harjoituksissa hyödynnetään sekä konkreettisia toimintavälineitä että kuviokieltä ja rinnalla kuljetetaan koko ajan yhteenlaskua vahvistaen käsitystä siitä, että kertolaskussa on kyse yhtä suurten lukujen yhteenlaskusta. Osuudessa on myös paljon tehtäviä, joissa oppilaiden täytyy piirtää laskusta kuva. Tällä pyritään tuomaan esille se, onko oppilas ymmärtänyt kertolaskun käsitteen oikein. Kertolaskun käsite -kategorian tehtävät ja harjoitukset löytyvät liitteestä 4.

Oppimateriaalin toisen kategorian tehtävien ja harjoitusten tavoitteena on, että oppilaat pääsevät harjoittelemaan kertotauluja ja oppivat ymmärtämään kertotaulujen systemaattisen toimintaperiaatteen. Jokaisen kertotaulun kohdalla lähdetään aluksi liikkeelle konkreettisten välineiden, kuten lukumääräpalojen tai kymppikorttien avulla. Viiden kertotaulun kohdalla konkreettisena välineenä hyödynnetään käsiä ja sormia. Konkreettisista välineistä eli taktiilisen toiminnan kielen käytöstä siirrytään kuviokielen käyttöön. Tästä hyvänä esimerkkinä on oppimateriaaliin valittu ja hieman muokattu Ikäheimon, Aallon ja Puumalaisen (2004, 68–69) esittämä multiplikare (ks. liite 5(14–15)). Multiplikareessa kuviota käytetään laskemisen tukena, sillä ensin täydennetään aina kuvio valmiiksi ja vasta sen jälkeen kirjoitetaan lasku matematiikan symbolikielellä ja lasketaan se. Kuvio on siis aina laskun kanssa samaan aikaan esillä. Samalla tämän kategorian tehtävien ja harjoitusten yhteydessä harjoitellaan sen ymmärtämistä, että kertotauluissa on systemaattinen toimintaperiaate. Esimerkiksi kolmen kertotaulussa voidaan selvittää, paljonko on kuusi kertaa kolme muistamalla, että viisi kertaa kolme on viisitoista. Tällöin siihen voidaan vain lisätä vielä yhden kerran kolme. Osa kategorian tehtävistä ja harjoituksista taas keskittyy lukujonotaitojen harjoitteluun jokaisen kertotaulun kohdalla erikseen siten, että oppilaat oppisivat liikkumaan lukujonossa eri mittaisin hyppäyksin. Materiaalissa harjoitellaan myös mekaanista laskutaitoa ja pyritään siihen, että kertotaulut opittaisiin lopulta ulkoa. Koska tämän kehitetyn oppimateriaalin rinnalla on tarkoituksena käyttää käytössä olevaa oppikirjaa, ei materiaali kuitenkaan keskity kovin paljon mekaanisten laskujen harjoitteluun, sillä yleensä oppikirjat tarjoavat niiden harjoitteluun jo runsaasti tehtäviä. Tämän esitellyn kertotaulukategorian tehtävät löytyvät liitteestä 5. Vaikka niissä toistuvat samankaltaiset tehtävät eri kertotaulujen kohdalla, on jokaisen kertotaulun versio kuitenkin liitteissä erikseen mukana.

Kolmannen kategorian tehtävät ja harjoitukset liittyvät kertolaskun vaihdannaisuuteen ja yhdistettyihin laskutoimituksiin, joissa kertolaskun rinnalla on mukana yhteen- tai vähennyslasku. Materiaalissa vaihdannaisuuden periaate opetetaan kahden kertotaulun yhteydessä, kun sille tuntuu tulevan todellinen tarve, sillä kahden kertotaulun laskuja on työlästä ajatella niin sanotusti oikein päin. Vaihdannaisuuden periaatteeseen tutustutaan erilaisten kuvioden kautta. Yhdistetyissä laskutoimituksissa hyödynnetään aluksi konkreettisuutta omenakuvakorttien avulla ja yhdessä tutkimalla selvitetään, mikä laskujärjestys on oikea. Lisäksi yhdistettyjen laskutoimitusten tehtävissä hyödynnetään runsaasti kuviokielen käyttöä. Tämän kategorian tehtävät löytyvät liitteestä 6.

Oppimateriaalin neljäs kategoria koostuu koko jaksoa koskevasta kertausmonisteesta sekä jakson loppukokeesta. Kertaustehtävissä esiintyy runsaasti kuviokieltä, sillä sen avulla pyritään vielä varmistamaan kertolaskun käsitteen sekä vaihdannaisuuden periaatteen ymmärtäminen. Lisäksi sanallisissa tehtävissä oppilaita ohjataan piirtämään ensin kuvio, joten kuvio toimii silloin oppilaan tukena tehtävän ratkaisemisessa. Sama toistuu myös kokeessa. Toisaalta siinä kuvioden käytöllä tarjotaan oppilaille mahdollisuus osoittaa käsitteiden ymmärtäminen ja toisaalta kuvioden piirtämiseen ohjaamisella tarjotaan oppilaille apukeinoa tehtävien ratkaisemiseen. Neljännen kategorian monisteet ovat esillä liitteessä 7.

Oppimateriaalin ensimmäisen version tehtävät ja harjoitukset ovat nähtävillä kategorioittain taulukossa 2. Koska oppimateriaalin ensimmäisen version tehtäviin ja harjoituksiin tehtiin muutoksia testaamisen jälkeen, eivät kaikki tässä taulukossa olevat tehtävät kuulu sellaisenaan tutkimuksen lopulliseen oppimateriaaliversioon. Liitteissä on kuitenkin nähtävillä pelkästään lopullisen version tehtävät ja harjoitukset, joten tässä taulukossa tehtävän tai harjoituksen kohdalla on mainittuna liite vain, jos tehtävän tai harjoituksen ensimmäinen versio otettiin oppimateriaalin toiseen versioon mukaan tekemättä siihen minkäänlaisia muutoksia.

**TAULUKKO 2.** Oppimateriaalin ensimmäisen version tehtävät ja harjoitukset jaoteltuina kategorioihin. Liite on mainittu tehtävän tai harjoituksen kohdalla vain, jos se on säilynyt muuttumattomana oppimateriaalin toisessakin versiossa.

Kertolaskun käsite	Kertotaulut	Vaihdannaisuus ja yhdistetyt laskutoimitukset	Kertaustehtävät ja koe
Omenaharjoitus: yhtä suurten lukujen yhteenlaskusta kertolaskuun (liite 4(1))	Kymppikorttiharjoitus (liite 5(1–2))	Multiplikare: vaihdannaisuus	Kertaustehtävämoniste
Lukumääräpalaharjoitus kertolaskun käsitteestä	Kymppikorttimoniste (liite 5(3–4))	Vaihdannaisuusmoniste	Jakson loppukoe (liite 7(3–4))
Lukumääräpalamoniste	Sanalliset tehtävät ja laskutarina: 10:n kertotaulu	Omenaharjoitus: yhdistetyt laskutoimitukset (liite 6(4))	
Korttiharjoitus: yhteenlasku – kertolasku – kuvio	Käsiharjoitus 5:n kertotaulusta	Omenamoniste: yhdistetyt laskutoimitukset (liite 6(5–6))	
Moniste: valitse yhteenlasku, piirrä kuva (liite 4(14))	Käsimoniste 5:n kertotaulusta (liite 5(7))	Sanalliset tehtävät ja laskutarina: yhdistetyt laskutoimitukset	
Sanalliset tehtävät: kertolaskun käsite (liite 4(15))	Sanalliset tehtävät: 5:n kertotaulu		
Laskutarina: sanallisen tehtävän keksiminen	3:n kertotaulun moniste		
	4:n kertotaulun moniste		
	Helminauhamoniste		
	Lukumääräpalaharjoitus: kertotaulut (liite 5(13))		
	Multiplikare (liite 5(14–15))		
	Lukujonokorttiharjoitus ja muistipeli		
	Kertotaulutikapuut (liite 5(21–22))		

### 8.3 Oppimateriaalin arviointi

Oppimateriaalia arvioitiin opetusjakson aikana kerätyn aineiston analyysin pohjalta. Tässä aineiston analyysia käsittelevässä luvussa tarkastelen oppimateriaalia oppisisältöjen omaksumisen näkökulmasta, tutkivan opettajan näkökulmasta sekä oppilaiden omasta näkökulmasta. Oppisisältöjen oppimisen näkökulman analysointi on tehty jakson lopussa pidetyn loppukokeen sekä

koko jakson aikana tehtyjen tehtävämonisteiden pohjalta. Tutkivan opettajan näkökulmaa koskeva aineiston analyysi on tehty videolta tehtyjen havaintojen ja tutkijan havaintopäiväkirjan pohjalta. Oppilaiden näkökulmaa koskeva analyysi taas on tehty oppilailla teetettyjen viikottaisten kyselylomakkeiden ja koko jaksoa koskevan kyselylomakkeen pohjalta. Analyysissa on jätetty pois kehittämisen kannalta merkityksettömät materiaalit, ja osaa viikkopalautteiden vastauksista on hyödynnetty jo prosessin aikana, kun on kehitetty uutta materiaalia seuraavia oppitunteja varten.

### 8.3.1 Oppisisältöjen oppimisen näkökulma

Jakson lopuksi oppilaiden osaamista testattiin koko jakson asioita koskevalla kokeella, jossa oli yhteensä viisi erilaista tehtävätyyppiä. Kokonaisuudessaan koe on nähtävillä liitteessä 7(3–4). Keskimäärin oppilaat menestyivät kokeessa hyvin. Yksi neljäsosa oppilaista (6 oppilasta) teki kokeen täysin virheettömästi ja sai siitä siten täydet pisteet. Jopa puolet oppilaista (12 oppilasta) ylsi niin hyvään tulokseen, että sai kokeesta vähintään 30 pistettä, kun täydet pisteet olivat 32. Lisäksi kaikki oppilaat saivat kokeesta yli 24 pistettä, mikä on kaksi kolmasosaa täydestä pistemäärästä.

Monet kokeen tehtävät olivat rakenteeltaan samankaltaisia kuin Smithin ja Smithin (2006, 143) tehtävät, joita he käyttivät tutkiessaan kertolaskun käsitteen ymmärtämistä kahdella eri luokalla, joissa kertolasku oli opiskeltu eri asioita painottaen. Kuten heidän tutkimuksessaan, tämänkin tutkimuksen opetuskokeilun kokeessa ymmärtämistä testattiin tehtävillä, joissa piti osata yhdistää kuvio ja lasku, laskea sanallisia tehtäviä sekä keksiä itse sanallinen tehtävä annetusta laskusta. Tosin tässä tutkimuksessa kuvion ja laskun yhdistämisessä tehtävänä oli kirjoittaa kuvasta kertolasku, kun taas heidän tutkimuksessaan tehtävänä oli piirtää kuva annetusta laskusta. Toisaalta tämän tutkimuksen kokeessa oppilaiden tehtävän oli piirtää kuvio sanallisen tehtävän yhteydessä.

Kokeen viidestä tehtävästä ensimmäisessä oppilaiden piti muodostaa kuvasta kertolasku sekä laskea se. Yksi näistä kolmesta kuvasta oli yhdistetty laskutoimitus, jossa oli kertolaskun lisäksi myös yhteenlasku. Tällä ensimmäisellä tehtävällä pyrittiin selvittämään, ovatko oppilaat ymmärtäneet kertolaskun käsitteen oikein. Jokainen oppilas oli osannut muodostaa kuvista oikeat kertolaskut, ja ainoat virheet ilmenivät kertolaskujen vastauksissa, joten tulkitsin ne mekaanisiksi laskuvirheiksi. Kaksi oppilasta ei ollut osannut muodostaa yhdistettyä laskutoimitusta oikein.

Toinen tehtävä koostui mekaanisista laskuista, joilla pyrittiin selvittämään ovatko oppilaat oppineet laskemaan jakson aikana opittujen kertotaulujen laskuja joko ulkomuistin avulla tai käyttäen jotain strategiaa. Tehtävässä oli 12 laskua, joista kolme oli yhdistettyjä laskutoimituksia. Mekaanista laskutaitoa testattiin myös muissa kokeen tehtävissä, ja koetta kokonaisuutena tarkasteltuna oppilailla oli selvästi eniten virheitä mekaanisissa laskutehtävissä, sillä yhteensä 62 % kokeiden virheistä oli

mekaanisia laskuvirheitä. Näistä virheistä noin 18 % (6 kpl) ilmeni yhdistetyissä laskutoimituksissa, joka oli koko jakson vaikein opetettu asia.

Kolmannessa tehtävässä oli kaksi noppakuvioista muodostettua kuvaa ja molempiin kuviin oli vaihtoehtona kaksi kertolaskua, joista oppilaiden tuli valita oikea. Tällä tehtävällä testattiin, olivatko oppilaat toisaalta sisäistäneet kertolaskun käsitteen ja toisaalta ymmärtäneet vaihdannaisuuden periaatteen siten, että vaikka luvut ovat eri päin ja vastaus on sama, lasku tarkoittaa kuitenkin eri asiaa. Tässä tehtävässä virheitä ilmeni yhteensä vain neljä, joten vaikuttaa siltä, että oppilaat olivat sisäistäneet kertolaskun käsitteen sekä vaihdannaisuuden periaatteen.

Kokeen neljännellä tehtävällä testattiin, osaavatko oppilaat soveltaa kertolaskuosaamistaan sanallisissa tehtävissä. Tehtävänä oli piirtää kahdesta sanallisesta tehtävästä kuvio sekä kirjoittaa lasku ja laskea se. Lisäksi vastaus täytyi kirjoittaa erikseen. Kaikki oppilaat olivat osanneet piirtää oikeanlaiset kuviot ja vain yksi oppilas ei ollut osannut muodostaa toisesta tehtävästä oikeaa kertolaskua. Tulkitsin sen kuitenkin huolimattomuusvirheeksi, sillä kuvio ja vastaus olivat oikein, joten todennäköisesti kertojaksi oli tullut vahingossa väärä numero. Lisäksi oppilaat olivat osanneet hyvin kirjoittaa vastaukseen oikean yksikön lukuun ottamatta kahta oppilasta, joista toiselta puuttui yksiköt kokonaan molemmista tehtävistä ja toiselta vaan toisesta tehtävästä. Koska yksiköt eivät olleet vääriä, vaan ne puuttuivat kokonaan, saattaa olla myös niin, että oppilaat ovat unohtaneet kirjoittaa yksiköt. Virheet, joita tässä tehtävässä ilmeni, olivat mekaanisia laskuvirheitä tai huolimattomuusvirheitä, kun vastauksesta oli jäänyt yksikkö pois.

Viimeisellä tehtävällä testattiin vielä kertolaskun käsitteen ymmärtämistä sekä mekaanista laskutaitoa. Tehtävänä oli laskea annettu kertolasku sekä keksiä siitä itse sanallinen tehtävä. Tässä tehtävässä koko luokalla oli yhteensä seitsemän virhettä niiden laadun mukaan luokiteltuna, mikä on noin 13 % virheiden kokonaismäärästä (ks. taulukko 4). Virheiden laatu oli hyvin vaihtelevaa. Yksi oppilas oli osannut kirjoittaa hienon sanallisen tehtävän, mutta kysymys oli kuitenkin hieman virheellinen, kun tehtävä viittasi ostosten yhteissummaan, mutta kysymys olikin, kuinka paljon ostajalla oli rahaa. Toinen oppilas taas oli kirjoittanut laskun luvuille hienosti sisällöt, mutta kysymys puuttui kokonaan. Yhdellä oppilaalla tehtävässä esiintyneet luvut eivät olleet peräisin annetusta kertolaskusta ja yhdellä taas luvut olivat tehtävässä väärinpäin. Eräs oppilas oli kirjoittanut tehtävän laskusta  $3 + 4$ , vaikka annettu laskutoimitus oli  $3 \cdot 4$ . Kahden oppilaan tehtävät eivät koskettaneet annettua laskua oikeastaan ollenkaan ja niissä oli piirteitä myös yhdistetyistä laskutoimituksista, vaikka lasku oli pelkkä kertolasku. Tehtävässä esiintyi siis hyvin eri tyyppisiä virheitä, mikä saattaa toisaalta kertoa myös siitä, että tehtävätyyppi oli hankala ja erilainen. Vaikka sitä olikin harjoiteltu oppituntien aikana, saattoi se aiheuttaa kokeessa kuitenkin hieman sekaannusta.

Tehtäväkohtaisesti jaoteltuna virheitä esiintyi selvästi eniten kokeen toisessa tehtävässä, jossa oli 12 mekaanista laskutehtävää. Vähiten virheitä taas oli tehtävässä kolme eli tehtävässä, jossa oppilaiden piti valita kahdesta laskusta se, joka sopii tehtävässä olevaan kuvaan. Taulukossa 3 on esiteltynä tarkemmin, miten paljon virheitä oli kunkin tehtävän kohdalla.

**TAULUKKO 3.** Kokeessa esiintyneiden virheiden määrät luokiteltuina tehtävien mukaan (n=55)

Kokeen tehtävä	Virheiden määrä	Virheet prosentteina
1. tehtävä: kuvasta lasku	5	9 %
2. tehtävä: mekaaniset laskut	29	53 %
3. tehtävä: valitse kuvaan sopiva lasku	4	7 %
4. tehtävä: sanalliset tehtävät	8	15 %
5. tehtävä: keksi sanallinen tehtävä	9	16 %

Taulukosta 3 nähdään, että virheitä oli selvästi eniten mekaanisissa laskutehtävissä, sillä virheistä yli puolet esiintyivät tämän tehtävän kohdalla. Toiseksi eniten virheitä esiintyi sanallisten tehtävien yhteydessä ja virheiden määrä oli melkein sama sanallisten tehtävien sekä oman sanallisen tehtävän keksimisen kohdalla. Selvästi vähiten virheitä oli tehtävissä, joissa piti osata liittää kuvaan oikea lasku joko muodostamalla se itse tai valitsemalla kahdesta vaihtoehdosta.

Koska osa kokeen tehtävistä oli muodostettu testaamaan samoja oppisisältöjä ja monessa tehtävässä esiintyi mekaanisia laskuvirheitä, vaikka sen tarkoituksena oli selvittää muuta osaamista, oli järkevää luokitella virheitä vielä niiden laatuja suhteen. Virheitä tarkastellessa esiin nousi neljä erilaista virhetyyppiä, jotka ovat mekaaniset laskuvirheet, huolimattomuusvirheet, oman sanallisen tehtävän keksimisen virheet sekä laskun muodostamisen virheet. Taulukossa 4 esitellään vielä virheet luokiteltuina virheiden laadun suhteen.

**TAULUKKO 4.** Kokeessa esiintyneiden virheiden määrät luokiteltuina virheiden laadun mukaisesti (n=55)

Virheluokka	Virheiden määrä	Virheet prosentteina
Mekaaniset laskuvirheet	34	62 %
Huolimattomuusvirheet	8	14 %
Oman sanallisen tehtävän keksiminen	7	13 %
Laskun muodostaminen	6	11 %

Taulukosta 4 nähdään, että selvästi eniten virheitä ilmeni mekaanisissa laskutehtävissä, joten vaikuttaa siltä, että mekaaninen laskutaito ja kertotaulujen ulkoa oppiminen on jäänyt osalla oppilaista hieman heikolle tasolle. Myös huolimattomuusvirheitä ilmeni yllättävän paljon, mutta toisaalta ne eivät ole yhteydessä oppimateriaalin laatuun. Koska oman sanallisen tehtävän keksimisessä ilmeni hyvin monenlaisia virheitä, oli niitä syytä tarkastella omana virheluokkana, sillä tehtävätyyppi saattoi myös olla yksi vaikuttava tekijä näiden virheiden kohdalla. Laskun muodostamiseen liittyvien tehtävien virheet taas viittaavat siihen, ettei kertolaskun käsitettä ole ymmärretty oikein. Toisaalta nämä virheet olivat kokeissa yksittäisiä. Jos oppilas ei ollut osannut muodostaa oikeaa laskua yhdestä kuvasta, oli hän kuitenkin osannut tehdä sen yleensä neljästä muusta tehtävänä olleesta kuvasta. Näin ollen tulkinta siitä, että oppilaat joilla oli näitä virheitä, eivät olisi ymmärtäneet kertolaskun käsitettä lienee liioiteltua.

Kokeiden lisäksi oppisisältöjen oppimisen näkökulmaa tarkasteltiin opetusjakson aikana oppilailta kerättyjen tehtävämonisteiden pohjalta. Tarkastelun perusteella ja pelkästään tehtävämonisteita tutkimalla ei noussut esiin erityisiä asioita oppimateriaalin kehittämisen kannalta. Yksi selvä ymmärtämistä helpottava kehittämiskohde tarkastelun pohjalta kuitenkin löytyi. Osassa monisteiden sanallisista tehtävistä ei vaadittu kuvion piirtämistä eikä sille ollut jätetty tehtävässä tilaa. Osa oppilaista olisi kuitenkin selvästi tarvinnut kuvion tueksi, jotta olisi ymmärtänyt, mistä kertolaskusta tehtävässä on kyse. Tämä tarve näkyy selvästi kuvissa 2 ja 3.

2. Juulia on lähtenyt ostoksille. Hän ostaa 3 erilaista pipoa talvea varten. Jokainen pipo maksaa 4 euroa. Kuinka monta euroa Juulian ostokset maksavat yhteensä?

$3 \cdot 4 = 12$

Vastaus:  $12 \text{ €}$

Four small boxes with the number 4 are drawn to the right of the problem.

**KUVA 2.** Oppilaan 20 piirtämä kuvio sanallisen tehtävän yhteydessä

6. Laske. Muista kirjoittaa myös vastaus!

1. Parkkipaikalla on yhdeksän autoa. Jokaisessa autossa on neljä rengasta. Kuinka monta rengasta autoissa on yhteensä?

$9 \cdot 4$

Vastaus:  $36$

Four small boxes with the number 4 are drawn above the problem.

**KUVA 3.** Oppilaan 17 piirtämä ja kumittama kuvio sanallisen tehtävän yhteydessä

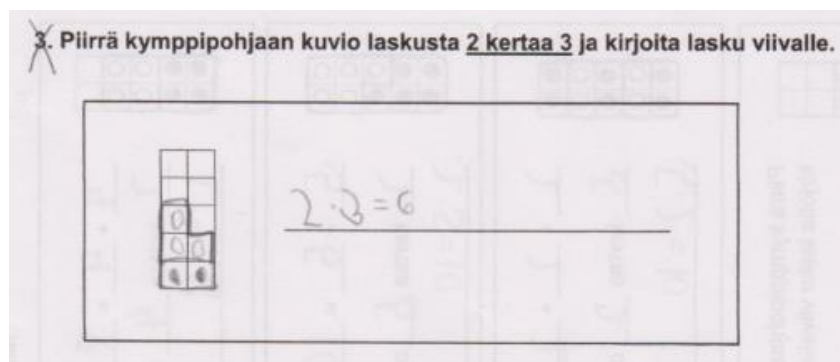


Kuvassa 2 nähdään, miten oppilas 20 on tarvinnut laskun muodostamisen tueksi kuviota, jonka piirtämiseen tehtävässä ei ohjattu, ja jonka tekemiseen ei oltu tehtävän kohdalla jätetty tilaa. Tämän vuoksi hän on joutunut piirtämään kuvionsa monisteiden reunassa olevaan tyhjään kohtaan. Kuvassa 3 nähdään myös, miten oppilas 17 on hyödyntänyt kuvion piirtämistä laskun muodostamisen tukena. Tässäkin tapauksessa kuvio on piirretty monisteissa olevaan tyhjään tilaan. Huomionarvoista on kuitenkin se, että tämä oppilas on lopuksi kumittanut piirroksensa pois. Hänelle on siis saattanut tulla tunne, että piirtäminen ei olisi sallittua tehtävän ratkaisemisessa, mikä ei ollut tarkoituksenmukaista, sillä oppimateriaalissa päinvastoin pyrittiin kannustamaan kuvioiden käyttöön ymmärtämisen ja laskemisen tukena.

### 8.3.2 Tutkivan opettajan näkökulma

Opetusjakson aikana aineistoa kerättiin myös havainnoimalla. Tutkivan opettajan roolissa havainnoin tunteja sekä oppituntien aikana että myöhemmin oppitunneilla kuvattujen videoiden pohjalta. Oppitunneilla tehdyt havainnot kirjasin joka kerta tunnin jälkeen ylös havaintopäiväkirjaan. Analyysivaiheessa havaintopäiväkirjan tekstiä sekä litteroituja videoita tarkastellessa näkökulmanani oli se, minkälaisia ongelmia opetustilanteissa ja tehtävien yhteydessä ilmenee. Analyysin perusteella erilaiset esiin nousseet ongelmat voidaan jakaa neljään eri luokkaan, jotka ovat käsitteeseen liittyvät ongelmat, laskustrategioihin liittyvät ongelmat, kertotauluihin liittyvät ongelmat sekä yksittäisiin tehtäviin liittyvät ongelmat.

Kertolaskun käsitteeseen liittyvät ongelmat ilmenivät luonnollisestikin kertolaskujakson alkuvaiheessa. Ensinnäkin aivan ensimmäisellä tunnilla omenoiden hakeminen korista kertolaskun tapaan (ks. liite 4(1)) sujui hyvin ja oppilaat osasivat hienosti muodostaa toiminnasta kertolaskuja yhteenlaskun kautta ja myöhemmin myös ilman yhteenlaskua. Kuitenkin sen jälkeen tehtävässä monisteissa, jossa kuviona olikin lukumääräpaloja esittävät kuviot, ilmeni ongelmia. Erityisesti osa oppilaista ei osannut piirtää oikeanlaista lukumääräpalakuviota annetusta laskusta. Kun tehtävän oli piirtää kuva laskusta  $2 \cdot 3$ , osa oppilaista oli piirtänyt kuvioon kakkospalan ja kolmospalan eli laskun  $2 + 3$ . Tämä on nähtävillä kuvassa 4.



**KUVA 4.** Tyypillinen virhe ensimmäisillä oppitunneilla

Sama virhe ilmeni myös seuraavalla tunnilla, kun pienissä ryhmissä laskimme laskuja lukumääräpalojen avulla. Kun oppilaiden tehtävänä oli tehdä lukumääräpaloilla lasku  $2 \cdot 3$ , moni oppilas otti laatikoista palat kaksi ja kolme. Sama toistui myös muilla laskuesimerkeillä. Perusteluna ratkaisuunsa oppilaat esittivät esimerkiksi seuraavaa:

*Opettaja: Tee lasku kaksi kertaa kolme. -- Mitä paloja silloin tarvitset?*

*Oppilas 15: No kaksi ja kolme.*

*Opettaja: Onko sinulla nyt täällä kaksi kertaa kolme?*

*(Oppilaat 11 ja 15 korjaavat ja laittavat kymppikehykseen kaksi kolmospalaa.)*

*Opettaja: Miksi te teitte eka näin? Miks te otitte kolmospalan ja kakkospalan?*

*Oppilas 11: No se on kaks kertaa kolme se täs on niinku se lasku täs.*

Oppilaat siis perustelivat ratkaisunsa sillä, että se kuvasi laskua. Kun laskussa oli luku kaksi, tarvittiin kakkospala ja koska siinä oli luku kolme, tarvittiin myös kolmospala. Virheen syynä saattoi olla käsitteen epäselvyyden sijaan myös se, että oppilaat eivät ymmärtäneet tehtävänantoa. Toisaalta oppilaat olivat aikaisemmin tottuneet työskentelemään lukumääräpaloilla yhteenlaskujen parissa, jolloin paloiksi kuuluukin valita laskussa olevia lukuja kuvaavat lukumääräpalat. Osa oppilaista myös ajatteli aluksi, että  $2 \cdot 3$  olisi sama asia kuin  $2 + 3$ , ja esimerkiksi oppilas 12 perusteli näkemystään sillä, että ”*niis on samat numerot ja ne on samalla tavalla*”.

Toinen käsitteeseen liittyvä virhe, joka ilmeni jakson ensimmäisillä tunneilla, oli se, että osa oppilaista sekoitti kertojan ja kerrottavan keskenään. Esimerkiksi lukumääräpaloilla laskua tehdessä oli seuraavanlainen tilanne:

*Opettaja: Tehkää lasku neljä kertaa kaksi.  
(Oppilas 6 ottaa kaksi nelospalaa.)*

*Oppilas 6: Teen kaksi kertaa neljän.*

*Oppilas 18: Neljä kertaa kaks. (Sanoo oppilas 6:lle.)*

*Oppilas 6: Niin katsos neljä kertaa kaks.*

*Opettaja: Onko siinä neljä kertaa kaksi?*

*Oppilas 6: Kyllä katsos tässä on kaksi nelosta ja se pitää laittaa neljä...  
neljän laittaa kaksi kertaa.*

*Opettaja: Mutta sä oot nyt ottanut täältä yhden kerran neljä ja toisen kerran  
neljä.*

*Oppilas 18: Se piti olla neljä kertaa kaks.*

*Oppilas 6: Niin mä laitoin ki.*

Oppilaan 6 luontainen tapa ymmärtää lasku oli siis käänteiseen suuntaan niin, että ensimmäinen luku kerrotaan toisella luvulla. Myös myöhemmin kyseinen oppilas selitti yhteisessä opetustuokiossa, että laskussa  $2 \cdot 3$  käytetään kakkospaloja ja hänen perustelunaan oli, että ”*niin siihen pitäis laittaa kakkosia, koska se kakkonen kerrotaan kolmella*”. Vielä tehtävien teon yhteydessäkin sama ongelma tuli esiin ja toisena perusteluna oli, että ”*kyllä siitäkin tulee sama vastaus*”. Oppilaan 6 tuntui siis olevan hyvin hankala muuttaa omaa virheellistä käsitystään ja toisaalta myös kertolaskun vaihdannaisuus tuntui sekoittavan hänen ajatteluaan.

Toinen havaintoja tehdessä esiin noussut ongelmatyyppi oli eri laskustrategioiden käyttö kertolaskuja laskettaessa. Ensinnäkin vaikka oppilaat tuntuivat ymmärtäneen kertolaskun vaihdannaisuuden periaatteen, moni oppilas ei silti osannut hyödyntää sitä omatoimisesti laskiessaan. Esimerkiksi neljän kertotaulua harjoiteltaessa usealle oppilaalle jo lasku  $5 \cdot 4$  oli hankala, ja heitä piti muistuttaa, että he voivat kääntää sen toisin päin laskiessaan, sillä he kyllä muistivat heti, paljonko  $4 \cdot 5$  on. Saattoi olla, että oppilaiden mieleen oli jäänyt vahvasti se, että vaikka vastaukset ovat samat, ei lasku silti ole sama. Sen vuoksi he eivät kenties uskaltaneet käyttää vaihdannaisuutta hyödyksi laskiessaan.

Toinen laskustrategioihin liittyvä ongelma oli siinä, että kaikki oppilaat eivät osanneet omatoimisesti käyttää tukilaskuja hyödyksi laskiessaan sellaisia kertolaskuja, joita ei vielä muistanut ulkoa. Oppilaat kyllä tiesivät heti, paljonko on  $6 \cdot 4$ , kun heitä muistutti, että paljonko olikaan  $5 \cdot 4$ . Vaikutti myös siltä, että oppilaat hyvin ymmärsivät kertotaulun systemaattisuuden. Kuitenkin toisten laskujen hyödyntäminen omatoimisesti tuntui olevan joillekin oppilaille hankalaa. Joidenkin oppilaiden strategiana oli mieluiten se, että he kävivät koko kertotaulun alusta alkaen läpi tehtävänä

olleeseen laskuun saakka. Esimerkiksi kertotaulukoepaperin sivussa saattoi näkyä kumitettuna koko kertotaulu, jonka avulla vastaukset oli etsitty. Oppilaan 21 kommentti tukilaskujen käyttämiseen oli, että ”mä en oo ikinä käyttäny enkä mä haluakkaa”. Kenties koko kertotaulun läpikäyminen tuntui hänestä jollain tapaa varmemmalta ja turvallisemmalta vaihtoehdolta.

Kolmantena ongelmatyypinä ilmeni kertotaulujen oppiminen eli mekaaninen laskujen ulkoa oppiminen. Erityisesti jakson viimeinen oppitunti ennen koetta paljasti, etteivät oppilaat osanneetkaan kertotauluja niin hyvin ulkoa, vaikka olivat pärjänneet kertotaulukokeissa.

*Oli kuitenkin yllätys, että oppilailla tuli mekaanisissa tehtävissä suuriakin vaikeuksia. -- He eivät muistaneet laskuja enää ulkoa, ja jouduin monta kertaa toistelevaan, miten voi ratkaista esimerkiksi laskun  $6 \cdot 4$  tai  $8 \cdot 4$ , jos ei muista sitä ulkoa. Hankaluudet ilmenivät nyt, kun kaikkien kertotaulujen laskuja oli sekaisin. -- Erityisesti neljän kertotaulu tuotti hankaluuksia, mutta toisaalta huomasin, ettei se ollut ainut. Joillakin oli vaikeuksia laskea esimerkiksi lasku  $3 \cdot 6$ . He eivät ehkä ymmärtäneet kääntää sitä ja ajatella kolmen kertotaulun laskuna, kun kuuden kertotaulua meillä ei vielä ollut tai sitten he eivät osanneet käyttää tukilaskua  $5 \cdot 3$  apunaan sen selvittämisessä. (Havaintopäiväkirja 3.11.2015)*

Toisaalta tämä kertotaulujen ulkoa osaamattomuus liittyy myös strategioiden käytön ongelmaan, jota tarkasteltiin edellä. Jos oppilaat eivät muistaneet jotain laskua ulkoa, menivät he helposti lukkoon eivätkä osanneetkaan ratkaista sitä oppimillaan keinoilla eli tukilaskujen tai vaihdannaisuuden avulla. Kuitenkin heti, kun heitä ohjasi siihen suuntaan, löytyi ratkaisu nopeasti, mutta osa oppilaista ei pystynyt siihen omatoimisesti, jolloin ratkaisu jäi kokonaan puuttumaan.

Havainnoinnin perusteella tuli esiin myös monia yksittäisiä tehtäviä, jotka itsessään vaikuttivat ongelmallisilta eivätkä täyttäneet tavoitettaan. Nämä tehtävät muodostavat neljännen ongelmatyypikategorian. Ensinnäkin ensimmäisellä tunnilla tehty moniste, jossa lukumääräpalojen muotoiset kuviot toimivat havainnollistuksena (ks. liite 4(5–6)) ei näyttänyt olevan hyvä jatkumo alkutunnin omenaharjoitukselle. Osa oppilaista meni vähän sekaisin, kun alkutunnista oli tutustuttu kertolaskuun toiminnan kautta hakemalla omenoita korista ja sen jälkeen kuviot, joista piti itse muodostaa kertolaskuja, olivatkin ihan erilaiset. Vaikka katsoimmekin ennen monistetta dokumenttikameralla kertolaskuja lukumääräpalojen avulla, ei yhteys eri harjoitusten välillä ollut riittävä. Oppilaat olivat osanneet asian omenaharjoituksen yhteydessä, mutta eivät osanneet siirtää samaa osaamistaan monisteen tekoon, kun ymmärtämisen tukena ollut kuvio vaihtui.

Toinen lukumääräpaloihin liittyvä ongelma ilmeni toisella oppitunnilla olleessa harjoituksessa, jossa oppilaiden tehtävänä oli muodostaa lukumääräpaloista annettuja laskuja. Harjoituksen muoto ei vaikuttanut olevan paras mahdollinen, sillä kuten edellä käsitteen ymmärtämiseen liittyvien

ongelmien kohdalla jo mainittiinkin, osa saattoi ymmärtää tehtävänannon väärin, jolloin he eivät osanneet tehdä tehtävää oikein. Nyt harjoituksessa lasku annettiin valmiina, kun taas edellisellä tunnilla omenaharjoituksessa toiminta oli ensin ja sen perusteella piti muodostaa lasku. Harjoitus oli enemmän oppilaiden osaamista testaava, kuin kertolaskun käsitettä opettava, kun harjoituksen avulla selvisi aina, osaako oppilas muodostaa lukumääräpaloilla laskun ja laskea sen. Nyt kertaa-käsite ei konkretisoitunut oppilaille enää toimintana, mikä varmasti olisi ollut vielä aluksi tarpeellista.

Kolmas havainnoinnin perusteella hankalalta vaikuttanut tehtävä oli viiden kertotauluun tutustumisen yhteydessä ollut käsiharjoitus, jossa laskettiin käsien sormia. Tarkoituksena oli, että oppilaat yhdessä parin kanssa tarkastelevat samoja käsiä siten, että ensin toinen oppilas laittaa yhden käden pulpetille, jolloin saadaan muodostettua lasku  $1 \cdot 5$ . Sen jälkeen sama oppilas laittaa toisenkin käden ja saadaan lasku  $2 \cdot 5$ . Tämän jälkeen otetaan mukaan toisenkin oppilaan kädet, jolloin pari saa yhdessä muodostettua laskut  $3 \cdot 5$  ja  $4 \cdot 5$ . Loppu kertotaulu käydään läpi yhdessä taululla käsikuvien avulla. Tämä harjoitus ei kuitenkaan tuntunut palvelevan oppilaiden oppimista, sillä vaikutti siltä, etteivät he käyttäneet käsiä tarkoituksenmukaisella tavalla. Havainnoinnin perusteella tuli vaikutelma, että taulukuvista oli heille enemmän hyötyä kuin omista ja parin käsistä.

Neljäs yksittäisen harjoituksen kohdalla ilmennyt ongelma liittyi multiplikareeseen. Multiplikareen käyttö kertotaulujen harjoituksen yhteydessä tuntui erittäin toimivalta, mutta vaihdannaisuuden oppimiseen se ei vaikuttanut soveltuvan. Koska oppilaat olivat edellisellä tunnilla tehneet multiplikareet kahden kertotaulusta, vaikutti hyvältä idealta havainnollistaa vaihdannaisuutta sen avulla siten, että jokainen pääsee ympyröimään multiplikareessa olleita palloja eri tavoilla, jotta vaihdannaisuuden idea havainnollistuu. Havainnoinnin perusteella se tuntui jäävän kuitenkin sekavaksi, eivätkä eri ryhmittelytavat erottuneet multiplikareesta tarpeeksi hyvin. Vaikutti myös siltä, etteivät oppilaat olisi halunneet sotkea omaa multiplikaretaan, josta he olivat niin innoissaan. Vaikutti myös, että vaihdannaisuuden havainnollistukseen olisi tarvittu jokin konkreettisempi väline pelkän kuvion ja piirtämisen sijaan.

Helminauhamoniste, jossa harjoiteltiin neljän kertotaulua värittämällä aina monisteesta yksi neljän helmen rivi kerrallaan, oli viides yksittäinen tehtävä, jonka kohdalla ilmeni ongelmia. Vaikutti siltä, että helmien värittäminen ei tukenut oppilaiden ymmärtämistä millään tavalla.

*Osa oppilaista ei oikein pitänyt väritystehtävästä. Ilmeisesti värittämisestä ei välttämättä ollutkaan sellaista tukea laskemiselle ja ymmärtämiselle kuin olin etukäteen ajatellut. Oppilaat olisivat vaan värittäneet kaikki helmet kerralla tai oikeastaan he olisivat mieluiten vain laskeneet kertolasku järjestyksessä värittämättä mitään.*

(Havaintopäiväkirja 19.10.2015)

Värittäminen ei siis vaikuttanut oppilaiden mielestä mieluisalta tehtävältä eikä se toisaalta näyttänyt toimivan hyvin myöskään opetuksellisten tavoitteiden osalta.

Kuudes yhteen tehtävätyyppiin liittyvä ongelma oli sanallisten tehtävien kohdalla. Aluksi kaikissa sanallisissa tehtävissä ei ollut tilaa, johon oppilaat olisivat voineet piirtää kuvion tehtävästä. Se olisi varmasti alusta pitäen auttanut heitä hahmottamaan paremmin. Tämän huomioin kuitenkin jo loppujakson sanallisissa tehtävissä, joihin jätin aina erikseen tilaa kuvion piirtämistä varten. Toinen sanallisiin tehtäviin liittyvä huomio oli se, että oppilaiden oli hankala hahmottaa, miten voi piirtää yksinkertaistetun kuvion laskusta. Opetin oppilaille pelkistettynä mallina laatikon, johon voi kirjoittaa sisälle vain numeron. Esimerkiksi laatikko kuvasi karkkipussia ja luku sen sisällä karkkien määrää. Erityisen hankala oppilaille oli tehtävä, jossa laskettiin jalkapallopeleissä tehtyjä maaleja, kun yhdessä pelissä oli tehty aina tietty määrä maaleja. Heidän oli hankala hahmottaa, että laatikolla kuvattiin pelejä ja niiden sisällä olevalla luvulla maalien määrää. Joidenkin oppilaiden oli siis hieman hankala hahmottaa, miten samanlaisella laatikolla voitiin kuvata aina eri asioita eri laskuissa. Taito kuitenkin kehittyi, kun kuvioita harjoiteltiin enemmän.

Lisäksi vielä seitsemäs yksittäiseen tehtävätyyppiin liittyvä ongelma ilmeni laskutarinan eli oman sanallisen tehtävän keksimisen kohdalla. Omia sanallisia tehtäviä oli keksitty jakson aikana jo aikaisemminkin, mutta erityisesti yhdistettyjen laskutoimitusten kohdalla, kun tehtävän olikin keksiä sanallinen tehtävä laskusta, jossa kertolaskuun vielä lisättiin jokin luku, laskutarinan keksiminen olikin haastavaa.

*Osalla oppilaista meni oman sanallisen tehtävän keksimisessä aluksi hieman sekaisin ja keksi laskusta kokonaan yhteenlaskuun liittyvän tehtävän. Yhtä oppilasta neuvoinkin kuitenkin piirtämään laskusta ensin yksinkertaistetun kuvion, jolloin hän itsekkin jo näki, ettei hänen keksimä tehtävänsä kuvannut kyseistä laskutoimitusta. Tällaisen tuen avulla hän kuitenkin ymmärsi, millaisen tehtävän voisi keksiä.*  
(Havaintopäiväkirja 2.11.2015)

Vaikutti siis siltä, että erityisesti vähän haastavamman laskutoimituksen kohdalla oppilaiden oli hankala suoraan annetusta laskusta keksiä sanallinen tehtävä. Kuvion piirtäminen tuntui olevan hyvä apukeino laskun ymmärtämiseen ja sanallisen tehtävän ideoimiseen.

Yhteenvetona vielä näihin edellä mainittuihin ongelmakohtiin liittyen voi todeta, että vaikka näkökulmana havaintojen analyysissa olikin ongelmakohtien etsiminen, löytyi havaintoaineistosta paljon ongelmatoita oppimista ja onnistumisen kokemuksia, jotka tässä analyysissa jätettiin kokonaan pois. Suurin osa oppilaista ei kohdannut kertolaskun oppimispolullaan edellä mainittuja ongelmia, vaan oppiminen oli sujuvaa. Suurin osa oppilaista näytti ymmärtävän käsitteen heti oikein

ja osasi käyttää eri strategioita hienosti apunaan, kun ei vielä muistanut kaikkia kertotaulujen laskuja kokonaan ulkoa. Koska tämän arvioinnin tavoitteena oli kuitenkin löytää kehittämiskohteita tutkimuksen oppimateriaalille, on tarkoituksenmukaista keskittyä opetusjakson aikana kohdattuihin ongelmiin, vaikka ne koskisivatkin vain muutamia tai yksittäisiä oppilaita. Näin oppimateriaalista saadaan kehitettyä paremmin monenlaisia oppijoita palveleva kokonaisuus.

### 8.3.3 Oppilaiden näkökulma

Oppilailla teetettiin jakson lopuksi kyselylomake, jossa oli kahdeksan yksinkertaistettua Likert-asteikollista väittämää. Ensimmäiset viisi väittämää koskivat oppilaiden asenteita matematiikkaa ja kertolaskuja kohtaan sekä oppilaiden käsitystä omasta taitotasosta. Kolmella viimeisellä väittämällä haluttiin selvittää, mitä mieltä oppilaat ovat eri kielten käytön hyödyllisyydestä kertolaskujen oppimisessa.

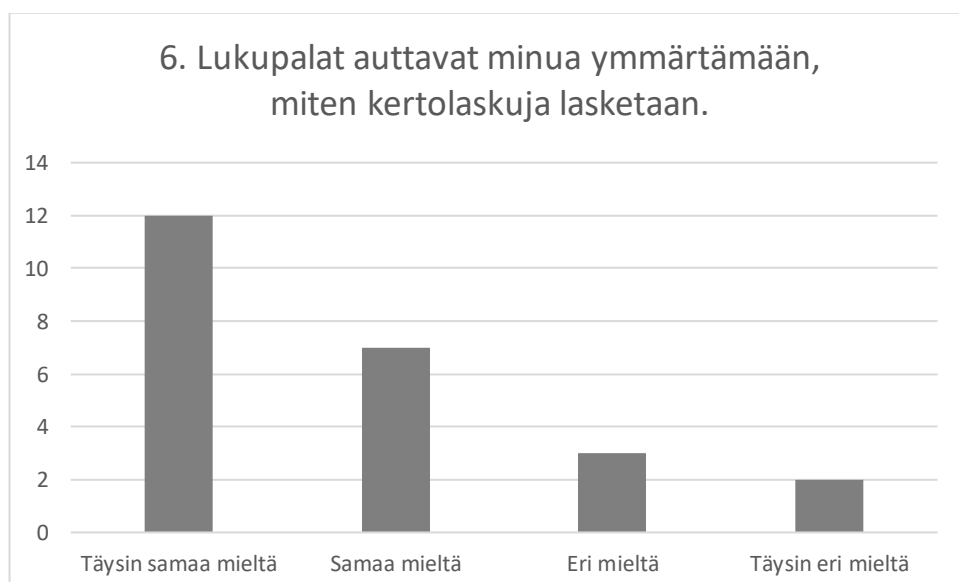
Kyselylomakkeeseen vastasivat kaikki 24 oppilasta. Ensimmäisellä väittämällä selvitettiin, mitä mieltä oppilaat ovat matematiikasta ylipäätään. Heistä 10 (42 %) oli sitä mieltä, että matematiikka on erittäin kivaa ja loput 58 % olivat sitä mieltä, että matematiikka on kivaa. Kaikilla luokan oppilailla oli siis myönteinen asenne matematiikan oppiainetta kohtaan. Kolmannella väittämällä selvitettiin samalla tavalla oppilaiden suhtautumista kertolaskuja kohtaan. Nyt 13 oppilasta (54 %) oli sitä mieltä, että kertolaskujen laskeminen on erittäin kivaa ja 42 % oli sitä mieltä, että niiden laskeminen on kivaa. Vain yksi oppilas koki, että kertolaskujen laskeminen ei ole kivaa. Siis lähes kaikki oppilaat suhtautuivat jakson jälkeen myönteisesti myös kertolaskuihin. Kolmen oppilaan mielestä kertolaskut vaikuttivat siis olevan jopa mielekkäämpiä kuin matematiikka yleensä. Kuitenkin yksi oppilas oli kokenut, ettei kertolasku ollut aiheena niin mielekäs kuin matematiikka yleensä.

Lomakkeen toisella väittämällä selvitettiin oppilaiden käsitystä omasta matematiikan osaamisen tasostaan. Yhteensä 22 (92 %) oppilasta arvioi olevansa hyvä tai erittäin hyvä matematiikassa, kun taas kaksi oppilasta arvioivat, että he eivät ole hyviä matematiikassa. Neljännellä ja viidennellä väittämällä selvitettiin oppilaiden käsitystä omista kertolaskujen laskemisen taidoista. Neljänteen väittämään 11 oppilasta (49 %) oli vastannut, että kertolaskujen laskeminen on erittäin helppoa ja loput 13 oppilasta (51 %) arvioivat, että niiden laskeminen on helppoa. Samoin 11 oppilasta (49 %) vastasi olevansa erittäin hyvä laskemaan kertolaskuja, kun taas puolet oppilaista oli sitä mieltä, että he olivat hyviä laskemaan kertolaskuja. Yksi oppilas arvioi, ettei ole hyvä kertolaskujen laskemisessa, vaikka hänkin oli kuitenkin kokenut kertolaskujen laskemisen olevan helppoa. Oppilaat siis kokivat olevansa hyviä sekä matematiikassa että kertolaskujen laskemisessa.

Yksi oppilas koki itsensä hyväksi kertolaskujen laskijaksi, vaikka hän tunsi, ettei ollut niin hyvä matematiikassa yleensä.

Yhteenvetona oppilaiden asenteista matematiikkaa ja kertolaskuja kohtaan sekä heidän omiin kykyihinsä liittyvistä käsityksistään voidaan todeta, että luokan oppilaat tuntuivat suhtautuvan yleisesti matematiikkaan positiivisesti ja he kokivat olevansa siinä taitavia paria poikkeusta lukuun ottamatta. Nämä poikkeustapauksetkaan eivät kuitenkaan kokeneet, että heidän taitonsa olisivat hyvin heikot. Kertolasku ei oppisisältöjen aiheena poikennut tästä, vaan asenteet sitä kohtaan olivat myös yhtä oppilasta lukuun ottamatta positiivisia ja arviot omista kyvyistä pysyivät myönteisinä myös kertolaskujen laskemisen osalta yhtä oppilasta lukuun ottamatta.

Kolmella viimeisellä väittämällä haluttiin selvittää, kokivatko oppilaat kielentämisen ja eri kielien käytön hyödylliseksi kertolaskujen oppimisen kannalta. Näistä ensimmäisellä väittämällä haluttiin selvittää, autoivatko jakson aikana paljon käytetyt toimintamateriaalit, lukumääräpalat, oppilaita ymmärtämään kertolaskuja. Oppilaista puolet oli sitä mieltä, että lukumääräpalat auttoivat heitä erittäin paljon ja 29 % oli sitä mieltä, että ne auttoivat jonkin verran ymmärtämään. Siis yhteensä 79 % oppilaista koki lukumääräpalojen käytön hyödyllisenä kertolaskujen ymmärtämisen kannalta. Vain 21 % oppilaista oli sitä mieltä, etteivät lukumääräpalat auttaneet heitä ymmärtämään kertolaskuja. Tuloksia havainnollistetaan tarkemmin kuviossa 3.

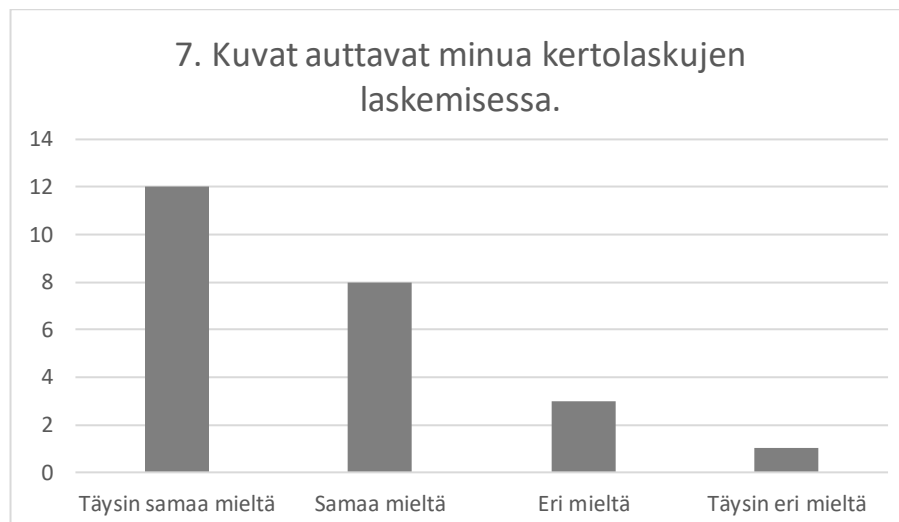


**KUVIO 3.** Lukumääräpalojen hyödyllisyys oppilaiden näkökulmasta (n=24)

Kielentämistä koskevista väittämistä toisella haluttiin saada tietoa siitä, miten hyödyllisiksi oppilaat kokivat kuvien käytön kertolaskujen laskemisessa. Jälleen puolet oppilaista koki, että kuvien käyttäminen auttaa heitä kertolaskujen laskemisessa erittäin paljon ja kolmasosa oppilaista oli sitä

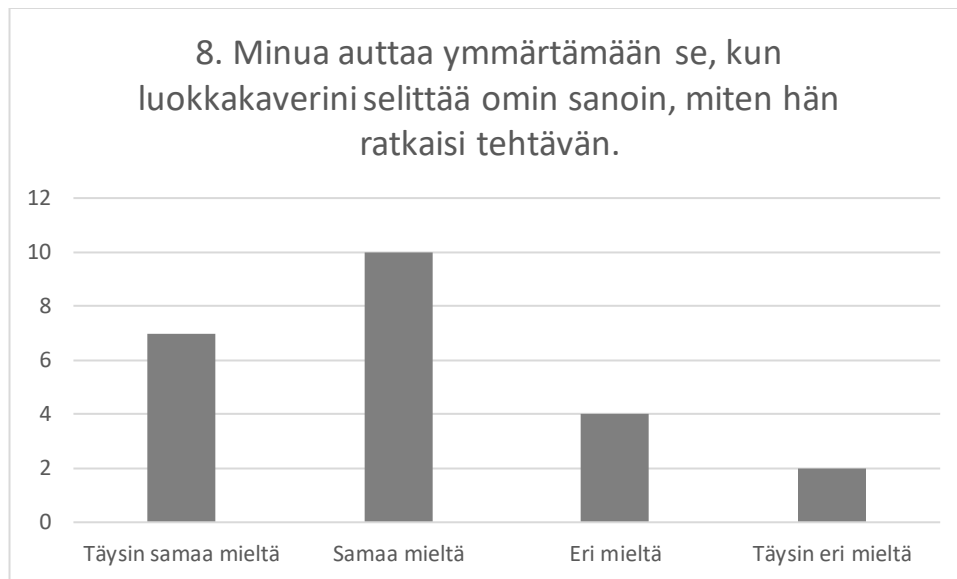


mieltä, että kuvien käyttäminen auttoi heitä jonkin verran kertolaskujen laskemisessa. Vain kolme oppilasta arvioi, että kuvien käyttäminen ei auta heitä kertolaskujen laskemisessa ja yksi arvioi, että kuvat eivät auta häntä ollenkaan kertolaskuissa. Suurin osa oppilaista siis koki kuvien käytön hyödyllisenä kertolaskujen laskemisessa. Vastausten jakaantuminen on tarkemmin nähtävillä kuviossa 4.



**KUVIO 4.** Kuvien käytön hyödyllisyys oppilaiden näkökulmasta (n=24)

Kolmannella kielentämistä koskevalla väitteellä haluttiin selvittää, kokevatko oppilaat ymmärtämisen kannalta hyödylliseksi sen, että toiset oppilaat kielentävät omin sanoin omia ratkaisutapojaan. Oppilaista 29 % (n=23) oli sitä mieltä, että se auttaa heitä erittäin paljon ja 41 % arvioi, että se auttaa heitä jonkin verran. Yhteensä 25 % oppilaista oli kuitenkin sitä mieltä, että toisten omin sanoin selittäminen ei auta heitä ymmärtämään. Neljä oppilasta arvioi, että se ei auta heitä ja kaksi oli jopa sitä mieltä, että se ei auta heitä ollenkaan. Yksi oppilas oli jättänyt kokonaan vastaamatta tähän väittämään. Näistä kolmesta kielentämiseen liittyvästä väitteestä tämän kohdalla oli eniten hajontaa, mikä on nähtävillä kuviossa 5. Luonnollisen kielen käyttö koettiin vähiten hyödyllisenä taktiiliseen toiminnan kieleen ja kuviokieleen verrattuna.



**KUVIO 5.** Luonnollisen kielen käytön hyödyllisyys oppilaiden näkökulmasta (n=23)

Yhteenvetona kolmen kielentämistä koskevan väitteen perusteella voidaan todeta, että oppilaat kokevat kielentämisen neljän kielen mallin käytön hyödyllisenä kertolaskun oppimisen kannalta. Suurin osa oppilaista oli vastannut sekä taktiilisen toiminnan kielen, kuviokielen että luonnollisen kielen käytön kohdalla sen käytön olleen hyödyllistä kertolaskujen oppimisen kannalta. Lukumääräpalojen ja kuvien käyttö koettiin lähes yhtä hyödylliseksi, mutta niihin verrattuna luonnollisen kielen käyttöä pidettiin hieman vähemmän hyödyllisenä, vaikka suurin osa oppilaista oli kuitenkin kokenut senkin hyödyllisenä oppimisen kannalta.

Kyselylomakkeen toinen puoli koostui avoimista kysymyksistä, joista ensimmäiset kolme koskivat jakson tärkeimpiä, helpoimpia ja vaikeimpia asioita. Kahdella seuraavalla kysymyksellä selvitettiin oppilaiden näkemyksiä koko jakson tehtävistä ja harjoituksista, ja ne esitellään myöhemmin viikoittaisten kyselylomakkeiden yhteydessä. Viimeinen kysymys oli tarkoitettu täysin vapaalle palautteelle koko jaksoa koskien, eikä siihen perehdytä tässä analyysissä sen tarkemmin. Lomake on esitetty liitteessä 1(2).

Suurin osa oppilaista oli sitä mieltä, että koko jakson tärkeimpiä opittuja asioita olivat kertotaulut. 18 oppilasta oli vastannut eri kertotaulujen olleen kolme tärkeintä asiaa, jotka hän oppi jakson aikana. Näistä kymmenessä vastauksessa oli mainittu neljän kertotaulu, joka oli tutkivan opettajan näkökulmasta ollut selvästi oppilaille haasteellisin. Kolme oppilasta oli maininnut tärkeimmäksi asiaksi kertolaskun ja yksi heistä vielä erikseen niiden ulkoa oppimisen. Kaksi oppilasta oli esittänyt tärkeimmäksi oppimukseen asiaksi yhdistetyt laskutoimitukset. Yksittäisissä vastauksissa esiintyi vielä kertolaskun vaihdannaisuus sekä parityöskentely.

Viisi oppilasta piti koko jakson helpoimpana asiana kymmenen kertotaulua ja neljä oppilasta oli sitä mieltä, että kahden kertotaulu oli ollut helpoin. Kolmen oppilaan mielestä kaikki jakson asiat olivat olleet helppoja. Lisäksi nollan kertotaulu, kolmen kertotaulu sekä viiden kertotaulu mainittiin helpoimpana asiana kolmen oppilaan vastauksissa. Muita yksittäisiä mainittuja asioita olivat neljän kertotaulu, kolmen kertotaulu, yhteenlaskut, multiplikare, matikka, omenoiden tuominen ja laskeminen.

Suurin osa oppilaista piti neljän kertotaulua hankalana, sillä 10 oppilasta oli valinnut sen vaikeimmaksi asiaksi koko jakson aikana. Toisaalta kuusi oppilasta oli sitä mieltä, että jakson aikana ei ollut mitään vaikeaa asiaa ja kaksi oppilasta ei osannut sanoa, mikä olisi ollut vaikein. Lisäksi yksittäisiä vaikeimmaksi mainittuja asioita olivat kolmen kertotaulu, monisteet, pelit sekä tehtävä, jossa piti keksiä itse laskusta sanallinen tehtävä ja piirtää siitä kuva.

Yhteenvetona tästä voidaan todeta, että oppilaat pitivät kertotauluja merkityksellisinä, sillä he kokivat eri kertotaulujen oppimisen olleen jakson aikana tärkeää. Lisäksi jakson tärkeimmän ja vaikeimman asian kohdalla näytti olevan yhteys, sillä suuri osa oppilaista oli valinnut neljän kertotaulun sekä vaikeimmaksi että tärkeimmäksi asiaksi koko jakson aikana. Jakson helpoimman asian kohdalla oli selvästi enemmän vaihtelua, kun oppilaat olivat maininneet helpoimmaksi hyvinkin erilaisia asioita.

Koko jaksoa koskevan kyselylomakkeen lisäksi oppilaiden näkökulmaa selvitettiin viikoittaisten kyselylomakkeiden (ks. liite 2) avulla. Lomakkeissa oli kolme avointa kohtaa sekä kaksi kysymystä, joissa oli valmiit vastausvaihtoehdot. Avoimilla kysymyksillä pyrittiin selvittämään, mikä oppilaiden mielestä oli viikon tärkein opittu asia, mikä oli helpointa ja mikä vaikeinta. Näiden kysymysten vastauksissa esiintyneitä asioita otettiin huomioon ja niitä hyödynnettiin jo oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämisen vaiheessa opetusjakson aikana, joten ne on jätetty tästä koko jaksoa koskevasta arvioinnista pois. Vastausvaihtoehdot sisältävillä kysymyksillä taas pyrittiin selvittämään, minkälaisina oppilaat kokivat viikon aikaiset tehtävät. Näissä kysymyksissä oppilaiden tuli valita viikon aikana tehdyistä tehtävistä rastilla mielekkäin ja ikävin tehtävä, ja lisäksi heitä pyydettiin perustelemaan, miksi he valitsivat juuri sen tehtävän.

Tehtävien arvioiminen tuotti melko paljon hajontaa. Jokaisella viikolla jokainen vaihtoehtona ollut tehtävä tuli valituksi sekä kivoimpana että ikävimpänä tehtävänä. Millään viikolla ei siis käynyt niin, että jokin tehtävä ei olisi ollut kenenkään mielestä kivoin tai ikävin. Tämä kertoo varmasti siitä, että oppilaat ovat erilaisia ja jokaisella on omat mieltymyksensä sen suhteen, millaiset opetuksessa käytetyt tehtävät ja harjoitukset ovat mieluisia ja millaiset eivät.

Selvästi suurin osa oppilaista oli sitä mieltä, että kivoin tehtävä koko jakson aikana oli mikä luku puuttuu? -tehtävä, jossa parin kanssa vuorotellen lukujonosta poistettiin yksi lukukortti ja parin

tuli päätellä, mikä luku lukujonosta puuttuu. Myöhemmin tehtävä nimettiin lukujonokorttiharjoitukseksi ja se löytyy liitteistä 5(16–20), mutta oppilaiden kyselylomakkeissa tehtävästä käytettiin heidän näkökulmastaan kuvaavampaa mikä luku puuttuu? -nimitystä. Harjoitus toteutettiin kolmella eri viikolla kahden, kolmen ja neljän kertotaulujen yhteydessä niiden kertotaulujen vastauksista koostuvilla lukujonoilla. Näinä jokaisena kolmena viikkona suurin osa oppilaista oli valinnut tämän kivoimmaksi tehtäväksi. Kahdella viikolla sitä mieltä oli 13 oppilasta ja yhdellä viikolla 10 oppilasta oli valinnut sen kivoimmaksi tehtäväksi. Kahtena muuna viikkona suurin osa oppilaista oli valinnut kivoimmaksi tehtäväksi oman sanallisen tehtävän keksimisen kertolaskusta sekä paritehtävänä toteutetun laskukorttiharjoituksen, jossa piti yhdistää yhteenlasku, kertolasku ja kuva. Muita tehtäviä, jotka suuri osa oppilaista oli valinnut mielekkäimmäksi, olivat muistipeli, multiplikare, kirjan tehtävät sekä opetustuokiona toteutettu omenaharjoitus.

Mielekkäiksi tehtäviksi valituista lukujonokorttiharjoitusta, laskukorttiharjoitusta sekä muistipeliä yhdistää se, että ne toteutetaan parityöskentelynä. Osa oppilaista olikin perustellut juuri näiden tehtävien valintaa sillä, että *”sai tehdä parityöskentelyä”* tai *”oli kiva pelata parin kanssa”*. Suuri osa oppilaista tuntuu siis kokevan mielekkääksi sen, kun saa työskennellä yhdessä parin kanssa. Toisaalta yksi oppilas oli valinnut lukujonokorttiharjoituksen myös ikävimmäksi ja hänen perustelunaan oli se, että *”en pidä parityöskentelystä”*. Luokasta löytyi siis näkemyksiä sekä parityöskentelyn puolesta että parityöskentelyä vastaan.

Lisäksi lukujonokorttiharjoitusta ja muistipeliä yhdistää pelillisuus. Muistipeli toimii tässä kuten tavallinenkin muistipeli, jossa pelataan toisia vastaan. Oppilaat olivat perustelleet tämän tehtävän valintaa mielekkäimmäksi sillä, että *”mä voitin”* tai *”olen siinä hyvä”*. Lukujonokorttiharjoituksessa taas on myös pientä kilpailuhenkisyttä mukana, kun oppilaat spontaanisti pyrkivät tehtävän edetessä tekemään parilleen mahdollisimman haastavia tehtäviä. Tämän tehtävän valintaa oppilaat olivatkin perustelleet sillä, että *”se oli kivaa arvuutella”*, *”oli kiva arvata ja ottaa pois”*, *”siinä oli haastetta”* tai *”sai ottaa monta numeroa pois”*. Oppilaat eriyttivätkin tätä tehtävää itsenäisesti ylöspäin, sillä he keksivät monia versioita siitä, miten he saavat tehtävästä tehtyä haastavamman. Ensinnäkin oppilaat alkoivat tehtävän edetessä ottaa useamman kuin vain yhden numeron pois lukujonosta. Myöhemmin jotkut parit keksivät vielä sellaisen version, että he eivät pitäneetkään lukujonokortteja järjestyksessä, vaan sekoittivat luvut satunnaiseen järjestykseen ja vasta sen jälkeen ottivat yhden tai useamman lukukortin pois. Kilpailullisuus tuntuu siis olevan yksi oppilaita motivoiva elementti, jota tehtävissä kannattaa hyödyntää.

Ikävimpien tehtävien kohdalla oppilaiden mielipiteissä oli selvästi enemmän hajontaa kuin mielekkäimmän tehtävän kohdalla. Kahtena viikkona suurin osa oppilaista oli kuitenkin sitä mieltä, että monisteet tai monisteet ja kirjan tehtävät olivat ikävimpiä. He siis tuntuivat pitävän enemmän

toiminnallisista harjoituksista. Mielipiteiden hajonta oli kuitenkin niin suuri, että näistä kahdesta viikosta toisella vain kuusi oppilasta ja toisella seitsemän oppilasta oli tätä mieltä. Toisena merkittävänä tehtävänä ikävimmäksi valittujen tehtävien joukosta nousi lukumääräpalaharjoitus (ks. liite 5(13)), kun yhdellä viikolla yhdeksän oppilasta oli sitä mieltä, että lukupalojen avulla laskeminen oli ollut ikävintä. Myös toisella viikolla yhteensä kuusi oppilasta oli valinnut lukupalatehtävän ikävimmäksi. Siis kirjan tehtävien ja monisteiden lisäksi lukumääräpalaharjoitus oli sellainen, joka suurimmasta osasta oppilaista ei tuntunut mielekkäältä. Perusteluiksi lukumääräpalaharjoituksen valinnalle osa oppilaista oli esittänyt, että *"se oli tylsää"* tai *"se oli helppoa"*. Vaikuttaa siis siltä, että oppilaat eivät motivoitu liian helpoista ja yksinkertaisista tehtävistä. Kirjan ja monisteiden tehtävien valintaa taas oli perusteltu sillä, että *"se oli tylsää"*, *"vaikeaa"* tai *"jotkut oli niin vaikeita"*. Yksi oppilas oli valinnut monisteet ikävimmäksi, koska *"monisteissa olevat tehtävät olivat vaan vähän vaikeampia"*. Toisaalta monisteita ja kirjan tehtäviä oli pidetty myös mielekkäimpinä ja sitä oltiin perusteltu siten, että *"niissä oli kivat tehtävät"*, *"niissä oppii"*, *"niissä on hyvää haastetta"* ja *"ne oli helppoja"*. Kirjojen ja monisteiden suhteen luokan oppilaiden keskuudessa oli siis ristiriitaisia näkemyksiä, kun ne oli valittu sekä kivoimmaksi että ikävimmäksi tehtäväksi monin perustein. Haastavuus esiintyi perusteluna sekä mielekkäimmän että ikävimmän tehtävän valinnassa.

Kaksi muuta ikävimmäksi mainittua tehtävää olivat kymppikorteilla laskeminen parin kanssa sekä oman sanallisen tehtävän keksiminen kertolaskusta. Kymppikorteilla laskeminen vaikutti olevan oppilaille hyvin helppo tehtävä, ja osa oppilaista oli perustellutkin valintaa, että *"se on jo helppoa"* tai *"se oli tylsää"*. Toisaalta tehtävä koettiin tylsäksi mahdollisesti sen pituuden vuoksi, sillä tehtävä oli tarkoituksella muodostettu sellaiseksi, että oppilaat joutuivat vielä käymään läpi isojenkin lukujen kertolaskut yhteenlaskun kautta, jolloin kertolaskun olemus yhtä suurten lukujen yhteenlaskuna selkiintyi edelleen. Oman sanallisen tehtävän keksiminen herätti oppilaissa ilmeisesti ristiriitaisia tunteita, sillä toisella viikolla suurin osa oppilaista oli valinnut sen mielekkäimmäksi tehtäväksi ja kolmannella viikolla suurimman osan vastauksista se nousi esiin ikävimpänä tehtävänä. Tehtävän valitsemista ikävimmäksi oli perusteltu sillä, että *"en keksinyt mitään"* ja *"en tykkää kirjoittaa matikan tunneilla"*. Toisaalta mielekkäimmäksi sitä oltiin perusteltu sillä, että *"sai itse ideoida tarinan"* ja *"keksin paljon kysymyksiä"*. Saattaa olla, että uudenaikaisena tehtävätyyppinä tehtävä koettiin ensimmäisellä kerralla mielekkääksi vaihtelun vuoksi. Samalla tavalla multiplikareen oli neljännellä viikolla valinnut kivoimmaksi tehtäväksi 11 oppilasta, kun taas viidennellä viikolla neljä oppilasta oli valinnut sen ikävimmäksi ja suuren hajonnan vuoksi se oli saanut määrällisesti eniten valintoja. Oppilaat pitivät multiplikareta mielekkäänä tehtävänä, koska *"se on helppo"*, *"oli kiva kirjoittaa ja piirtää lasku"* ja *"se oli haastava"*. Toisaalta se oli koettu ikävimmäksi, koska siinä oli *"liian paljon laskuja"* ja *"vaikka laskut on oikein niin se on tylsää"*. Osa oppilaista oli kokenut sen

siis liian työlääksi ja tylsäksi, mutta toisaalta taas osa oppilaista piti siitä sen helppouden ja toisaalta haastavuuden vuoksi ja yhden oppilaan mielestä oli mielekästä kirjoittaa ja piirtää laskuja.

Jakson päätteeksi koko jaksoa koskevassa lomakkeessa oppilaita pyydettiin myös nimeämään koko jakson mukavin ja ikävin tehtävä perusteluineen. Näihin kysymyksiin oppilailta tuli melko niukasti vastauksia. Mahdollisesti syynä saattoi olla se, että he eivät pystyneet enää palauttamaan tarpeeksi hyvin mieleen jaksolla tehtyjä asioita. Jonkinlainen lista tai kertaus tehtävistä olisi ehkä ollut tarpeen. Osittain vastausten niukkuudesta johtuen hajonta mainituiksi tulleiden eri tehtävien välillä oli siis melko suuri, mutta kuitenkin suuri osa oppilaista (5 oppilasta) valitsi jakson mukavimmaksi tehtäväksi multiplikareen. He eivät kuitenkaan osanneet perustella valintaansa. Toiseksi eniten oppilaita (4 oppilasta) valitsi mukavimmaksi muistipelin, mihin perusteluna oli se, että *"pidän muistipelistä"* ja *"oli kiva tehdä kaverin kanssa"*. Myös voittaminen ja häviäminen mainittiin perusteluissa. Ikävimmän tehtävän kohdalla hajonta oli vielä suurempi ja 14 oppilasta ei ollut osannut edes mainita ikävintä tehtävää. Kaksi oppilasta oli maininnut ikävimmäksi tehtäväksi monisteet ja yksittäisiä mainintoja sai lukumääräpalaharjoitus, oman sanallisen tehtävän keksiminen, muistipeli, kirjan tehtävät, omenaharjoitus sekä koe. Vastausten niukkuuden ja suuren hajonnan vuoksi koko jaksoa koskevasta oppilaiden näkökulmasta tehtävien suhteen on hankala esittää suurempia johtopäätöksiä.

## 9 YHTEENVETO

Tässä luvussa teen yhteenvetoa analyysin tuloksista ja peilaan niitä aikaisempaan tutkimuskirjallisuuteen ja teoriaan. Lisäksi vastaan ensimmäisen ja toiseen tutkimuskysymykseen. Ensin luvussa 9.1 käsittelen kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen ja kertotaulujen oppimiseen vaikuttavia tekijöitä, jotka ovat nousseet esiin teoriasta ja tässä tutkimuksessa toteutetun opetuskokeilun aikana. Samalla vastaan ensimmäiseen tutkimuskysymykseen siitä, mitkä tekijät vaikuttavat kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen ja kertotaulujen oppimiseen. Luvussa 9.2 teen yhteenvetoa analyysin tuloksista siitä näkökulmasta, miten onnistunut oppimateriaalin ensimmäinen versio oli testaamisen perusteella ollut. Ensin tarkastelen oppilaiden asenteita matematiikkaa ja kertolaskuja kohtaan. Sen jälkeen tarkastelen oppimateriaalin pätevyyttä oppisisältöjen oppimisen näkökulmasta sekä pohdin kielentämisen ja lukumääräpalojen soveltumista kertolaskun opetukseen. Lopuksi tarkastelen vielä oppimateriaalin tehtäviä oppisisältöjen oppimisen sekä oppilaiden näkökulmista. Luvussa 9.3 esittelen vielä oppimateriaalille testaamisen perusteella löytyneitä kehittämistarpeita.

### *9.1 Kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen ja kertotaulujen oppimiseen vaikuttavia tekijöitä*

Tässä tutkimuksessa kehitetyn oppimateriaalin ensimmäisen version testauksen myötä sekä kertolaskuun liittyvään aikaisempaan tutkimuskirjallisuuteen perustuen löytyi muutamia kertolaskun oppimisen kannalta merkittäviä tekijöitä. Tärkeimmäksi huomioksi osoittautui se, että opetuksessa kaikkeen tulisi löytää kultainen keskitie siten, että erilaiset opetuksessa olevat painotukset olisivat tasapainossa. Seuraavaksi tarkastelen kahtiajakoa kertolaskun käsitteen ja mekaanisen kertolaskutaidon painotusten välillä sekä kertolaskun vaihdannaisuuden ymmärtämisen ja käytön välillä.

Kertolaskun osaamista yhtenä matematiikan sisällöistä voidaan, kuten matematiikan sisältöjen osaamista yleensäkin, tarkastella käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden näkökulmista. Käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan matemaattisten käsitteiden ja operaatioiden ymmärtämistä ja proseduraalinen sujuvuus taas viittaa ymmärrykseen proseduureista

ja taitoon käyttää niitä (Kilpatrick ym. 2001, 116). Kertolaskun yhteydessä käsitteellinen ymmärtäminen viittaa kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen ja proseduraalinen sujuvuus taas taitoon laskea kertolaskuja virheettömästi ja tehokkaasti. Molemmat taidot ovat välttämättömiä kertolaskun osaamiselle.

Kilpatrickin ja hänen kollegoidensa (2001, 122) mukaan käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus asetetaan usein koulumatematiikassa vastakkain sen suhteen, kumpaa tulisi opetuksessa painottaa enemmän. Magdaksen (2012, 13) mukaan kertotaulujen ulkoa opettelu korostuu yleensä opetuksessa. Smith ja Smith (2006) taas toteavat, että ulkoa oppimista painottavalla opetuksella oppilaat eivät opi kertolaskun käsitettä. Tässä tutkimuksessa kehitetyssä oppimateriaalissa pyrittiin painottamaan erityisesti kertolaskun käsitteen ymmärtämistä, mikä taas opetuskokeilussa näytti johtavan siihen, että oppilaiden mekaaninen kertolaskutaito jäi hieman heikoksi, sillä loppukokeessa olleista virheistä suurin osa oli mekaanisia laskuvirheitä. Kertolaskun käsite näytti kuitenkin olevan hyvin ymmärretty. Kilpatrick kollegoineen (2001, 122) toteaaakin, että näiden kahden osa-alueen, käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden välille ei tulisi tehdä kahtiajakoa, sillä ne ovat yhteydessä toisiinsa toimivat oppimisessa toisiaan tukevinä osa-alueina. Myös opetuskokeilun perusteella kertolaskun opetuksesta tulisi saada tasapainoinen kokonaisuus, jossa kertolaskun käsitteen ymmärtämistä painotettaisiin huolellisesti, mutta kuitenkin proseduraalista sujuvuutta eli mekaanista kertolaskutaitoa tulisi myös painottaa opetuksessa riittävästi.

Toinen sekä teoriassa että tässä tutkimuksessa esiin noussut huomio liittyy kertolaskun vaihdannaisuuteen. Ikäheimon ja kollegoiden (2004, 18) mukaan vaihdannaisuus on yksi kertolaskujen laskemista helpottava ominaisuus, mutta sitä saatetaan helposti korostaa opetuksessa liikaa. Heidän mukaan oppilaille saattaa silloin helposti tulla vääristynyt käsitys siitä, että laskun kirjoitusjärjestyksellä ei ole merkitystä, kun vastaus on kuitenkin sama. Tämän tutkimuksen oppimateriaalissa haluttiin välttyä tällaiselta vääristyneeltä käsitykseltä ja opetuskokeilussa pyrittiinkin erityisesti painottamaan sitä, että vaikka vastaus on lukujen eri järjestyksestä huolimatta sama, tarkoittavat laskut kuitenkin eri asiaa. Opetuskokeilussa päädyttiinkin lopulta täysin päinvastaiseen ongelmaan kuin tyypillisesti vaihdannaisuuden yhteydessä. Oppilaat tuntuivat ymmärtäneen erittäin hyvin sen, että jos luvut ovat eri päin, on kyseessä kuitenkin eri laskut, vaikka vastaukset ovatkin samat. Vaikuttaa kuitenkin siltä, että nyt tämä laskujen erilaisuuden painottaminen ylikorostui opetuksessa ja johti jopa siihen, että osa oppilaista ei uskaltanut hyödyntää vaihdannaisuutta laskiessaan. Vaikka opetuksessa ohjattiin vaihdannaisuuden hyödyntämiseen laskemisen helpottumisen vuoksi, osa oppilaista hyödynsi vaihdannaisuutta vain, jos heitä erikseen kehoitettiin käyttämään sitä. Vaihdannaisuuden periaatteen ymmärtämisen sekä sen käytön



hyödyllisyyden painottamiseen tulisi opetuksessa siis myös löytää tasapaino, jotta oppilaat toisaalta oppisivat hyödyntämään sitä laskiessaan, mutta toisaalta välttyisivät siltä väärinkäsitykseltä, että laskun kirjoitusjärjestyksellä ei ole merkitystä.

Näiden edellä mainittujen painotusten välille löydettävän tasapainon tärkeyden lisäksi kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen liittyen tuli tämän tutkimuksen oppimateriaalin ensimmäisen version testauksen yhteydessä esiin muutamia asioita. Ensinnäkin vaikka kertolaskun idea toimintana vaikuttaa intuitiivisestikin melko selvältä, ei käsitteen ymmärtäminen laskutoimituksena näytä olevan oppilaille yhtä selvää. Tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat vaikuttivat ymmärtävän kertolaskun idean heti toimintana ja luonnollisen kielen kautta, kun haimme korista esimerkiksi kaksi kertaa kolme omenaa ja kirjoitimme tästä yhdessä kertolaskun tai kun oppilaat hakivat korista omenoita annetun kertolaskun mukaisesti. Kuitenkin kun sen jälkeen työskentelimme abstraktimpien toimintamateriaalien ja kuvioden kanssa, ei niiden yhdistäminen matematiikan symbolikielellä olleeseen kertolaskuun ollutkaan niin yksinkertaista. Luvut saattoivat kääntyä väärin päin tai kertolasku saatettiin vielä jopa sekoittaa yhteenlaskuun. Käsitteen opetteluun yhteydessä siirtymiseen konkreettisesta toiminnasta abstraktimmalle tasolle täytyy siis kiinnittää erityisesti huomiota, sillä vaikka käsite toimintana näyttääkin oppilaille selvältä, ei se silti kerro vielä abstraktin käsitteen ymmärtämisestä.

Toinen käsitteen ymmärtämiseen liittyviä huomio oli oppilaan luontaisessa tavassa ymmärtää kertolasku. Tämän tutkimuksen opetuskokeilussa erityisesti yhdellä oppilaalla oli hankaluuksia ymmärtää kertolaskun kertojan ja kerrottavan paikat oikein. Hänen luontainen ajattelutapansa oli sellainen, että ensin laskussa on kerrottava ja sen jälkeen tulee luku, jolla kerrotaan. Erityisesti tämä tuli esille hänen puheessaan, kun hän sanoi esimerkiksi laskusta  $4 \cdot 2$ , että ”*teen kaksi kertaa neljän*” tai ”*neljän laittaa kaksi kertaa*”. Lampisen, Neményin ja Oraveczin (2011, 9) mukaan tämä tapa ajatella on lapselle luontainen kertolaskun yhteydessä ja tätä merkintätapaa käytetään unkarilaisessa matematiikan opetuksessa. Sen tavan mukaan ensin lasketaan, montako on yhdessä ryhmässä ja sen jälkeen, kuinka monta kertaa tuota lukumäärää on. Tällainen vasemmalta oikealle kulkeva kirjoitussuunta on käytössä yhteen-, vähennys- ja jakolaskussa, kun aina vasemmalla olevaan lukuun lisätään, siitä vähennetään tai se jaetaan. Suomalaisessa opetuksessa ja yleisemminkin maailmalla kertolasku on tästä poikkeus, kun siinä luku, joka kerrotaan, tuleeikin vasta toisena. Koska tämä tapa on ristiriitainen lapsen luontaisen ajattelutavan kanssa, on se yksi syy kertolaskun oikean merkitsemistavan oppimisen hankaluudelle. (Lampinen ym. 2011, 9.) Toki tämä tuli tutkimuksessa esiin erityisesti vain yhdellä oppilaalla, joten yleistäminen ei ole mahdollista. Kuitenkin tämä oli tärkeä yksittäinen havainto, jonka perusteella selvisi, että voi olla mahdollista ymmärtää kertolasku

luontaisesti tälläkin tavalla. Kertolaskun käsitteen opetuksen alussa tähän on siis syytä kiinnittää huomioita, jotta voidaan varmistua, että jokainen oppilas ymmärtää oikean tavan.

Tämän tutkimuksen sekä tässä tutkimuksessa tarkastellun aikaisemman tutkimuskirjallisuuden perusteella kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen oppimisessa huomioitavia tekijöitä ovat tasapainon löytäminen sekä kertolaskun käsitteen ymmärtämisen ja kertotaulujen ulkoa oppimisen välille että vaihdannaisuuden ymmärtämisen ja sen käytön hyödyllisyyden painottamisen välille. Näin oppilaat oppivat ymmärtämään kertolaskun käsitteen ja saavuttavat sujuvan kertolaskutaidon. Lisäksi kertolaskun käsitteen opettamisen alussa on syytä kiinnittää erityistä huomiota konkreettisesta toiminnasta abstraktimmalle tasolle siirtymiseen sekä siihen, miten oppilaat voivat luontaisesti ymmärtää kertolaskussa kertojan ja kerrottavan järjestyksen.

## ***9.2 Yhteenvetoa oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta testausjakson perusteella***

Oppimateriaalin ensimmäisen version onnistuneisuutta voidaan tarkastella opetuskokeilun perusteella kolmesta eri näkökulmasta. Ensin tarkastelen oppilaiden asenteita ja toiseksi tarkastelen oppimateriaalia oppisisältöjen oppimisen sekä oppimateriaalin taustalla olleiden pedagogisten lähestymistapojen soveltumisen näkökulmasta. Kolmantena näkökulmana on oppimateriaalin tehtävät ja harjoitukset, joita tarkastelen sekä oppilaiden että oppimisen näkökannoilta.

Ensinnäkin vaikutti siltä, että oppimateriaalin ensimmäinen versio oli onnistunut sen suhteen, että se säilytti oppilaiden positiiviset asenteet matematiikkaa ja omia kykyjään kohtaan. Kyselylomakkeen perusteella kaikkien luokan oppilaiden mielestä matematiikka on kivaa ja yhtä oppilasta lukuun ottamatta kaikki olivat myös sitä mieltä, että kertolaskujen laskeminen on kivaa. Oppimateriaalin tehtävien ja harjoitusten mukaisesti opiskeltuaan oppilaille jäi siis positiivinen suhtautuminen kertolaskuja kohtaan. Samoin oppimateriaalin mukaisesti opiskeltuaan oppilaille jäi myönteinen käsitys omista kyvyistään kertolaskujen laskemisen suhteen lukuun ottamatta yhtä oppilasta, joka ei kokenut olevansa hyvä laskemaan kertolaskuja. Yhden oppilaan usko omiin kykyihinsä kertolaskujen suhteen oli jopa parempi kuin kykyihin yleisesti matematiikan suhteen, sillä 23 oppilasta koki olevansa hyvä laskemaan kertolaskuja, kun taas 22 oppilasta koki olevansa hyvä ylipäättään matematiikassa. Vaikuttaisi siis siltä, että oppimateriaalin ensimmäinen versio on täyttänyt Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa olevat vaatimukset siitä, että opetuksen tulisi tukea oppilaiden positiivista asennetta matematiikkaa kohtaan sekä oppilaiden minäkuvaa matematiikan oppijoina (Opetushallitus 2014, 128).

Oppimisen näkökulmasta opetuskokeilun perusteella vaikutti siltä, että oppimateriaali oli onnistunut, sillä kaiken kaikkiaan oppilaat menestyivät jakson loppukokeessa hyvin. Loppukokeessa oli monia tehtäviä, joilla testattiin kertolaskun käsitteen ymmärtämistä ja osa tehtävistä oli todettu esimerkiksi Smithin ja Smithin (2006) tutkimuksessa hyväksi kertolaskun käsitteen ymmärtämisen tasoa kuvaaviksi tehtäviksi. Tässä tutkimuksessa oppilaat menestyivät niissä tehtävissä hyvin, joten vaikuttaa siltä, että oppilaat ovat ymmärtäneet kertolaskun käsitteen kunnolla. Selvästi oppilailla näytti kuitenkin olevan hankaluuksia kertotaulujen muistamisessa, sillä eniten virheitä tuli mekaanisissa laskutehtävissä. Vaikuttaa siis siltä, että oppilaat eivät olleet oppineet kertotauluja kunnolla ulkoa tai eivät osanneet tai ymmärtäneet hyödyntää oppimiaan laskustrategioita riittävän hyvin. Vähiten virheitä kokeessa oli laskun muodostamisessa, mikä viittaa myös siihen, että käsite on ymmärretty hyvin. Toisaalta lähes kolmasosalla oppilaista oli virheitä oman sanallisen tehtävän keksimisessä. Vaikka tällainen tehtävä oli myös Smithin ja Smithin (2006) tutkimuksessa tehtävänä, jolla testattiin käsitteen ymmärtämistä, olivat tässä tutkimuksessa tämän tehtävän kohdalla esiintyneet virheet kuitenkin niin erilaisia, että ne eivät välttämättä kerro heikosta käsitteen ymmärtämisen tasosta. Joistain tehtävistä puuttui kysymys kokonaan tai se oli virheellinen ja joissain ratkaisuihin tehtävä oli muodostettu aivan eri luvuista kuin oli tarkoitus tai tehtävä ei muuten koskettanut annettua laskutoimitusta millään tavalla. Yksi oppilas oli laittanut tehtävään luvut väärin päin ja yksi oli tehnyt tehtävän yhteenlaskuna kertolaskun sijaan. Virheiden monimuotoisuuden perusteella voisi siis todeta, että virheet tehtävässä eivät välttämättä ole osoitus heikosta käsitteen ymmärtämisestä muutoin kuin kahden viimeksi mainitun virheen kohdalla. Toisaalta monet muut käsitteen ymmärtämistä testaavat tehtävät olivat onnistuneet hyvin myös näiltä kahdelta oppilaalta. Saattaa siis olla, että tällainen erilainen tehtävätyyppi myös sekoitti oppilaita kokeessa, vaikka sitä olikin harjoiteltu muutaman kerran opetusjakson aikana.

Käsitteen ymmärtämisen tasosta kertoo hyvin myös se, että luokan jokainen oppilas yhtä huolimattomuusvirhettä lukuun ottamatta oli osannut muodostaa sanallisesta tehtävästä oikean laskun. Lisäksi oppilaat olivat osanneet hyvin kirjoittaa vastaukseen oikean yksikön lukuun ottamatta kahta oppilasta, joista toiselta puuttui yksiköt kokonaan molemmista tehtävistä ja toiselta vaan toisesta tehtävästä. Koska yksiköt eivät olleet väärinä, vaan ne puuttuivat kokonaan, saattaa olla myös niin, että oppilaat ovat unohtaneet kirjoittaa yksiköt. Oikeanlaisten laskujen sekä yksiköitten oikein kirjoittaminen ovat hyvä osoitus myös siitä, että oppilaat ovat ymmärtäneet vaihdannaisuuden oikealla tavalla eivätkä kuvittele, että laskun kirjoitusjärjestyksellä ei olisi merkitystä. Ikäheimon ja kollegoiden (2004, 18) mukaan tämä väärinymmärtämisen ongelma tulee esiin yleensä juuri sanallisten tehtävien yhteydessä, kun yksiköt ovat mukana.

Kokeen ja jakson viimeisten tuntien havainnointien perusteella monilla oppilailla kertotaulujen ulkoa oppiminen ja toisaalta myös erilaisten laskustrategioiden käyttäminen jäivät vielä hieman heikolle tasolle. Suurin osa loppukokeen virheistä oli mekaanisia laskuvirheitä ja viimeisen kertaustunnin tärkein havainto oli se, että monet oppilaat tarvitsivat vielä tukea siihen, että he huomaisivat käyttää esimerkiksi vaihdannaisuutta tai tukilaskuja apuna, jos eivät muistaneet laskun vastausta ulkoa. Useimpien tutkimusten perusteella kertolaskujen vastausten hakeminen pelkästään muistista yleistyy iän myötä (De Brauwer ym. 2006, 44–45). Ei siis välttämättä ole kovin huolestuttavaa, jos oppilaat eivät toisen luokan syksyllä osaa vielä kaikkia harjoiteltuja laskuja ulkoa. Esimerkiksi Lemairen ja Sieglen (1995) tutkimuksessa toisen vuosiluokan oppilailla ulkoa muistamisen käyttö strategiana lisääntyi merkittävästi lukuvuoden aikana tehtyjen kolmen testauksen aikana. Toisaalta myös Steelin ja Funnellin (2001) tutkimuksessa yli puolet 8–9-vuotiaista kuului ryhmään, jossa ulkoa muistamisen lisäksi kertolaskujen laskemisessa käytettiin muitakin eri strategioita, kun taas 10–12-vuotiaista jo yli puolet pystyivät laskemaan kertolaskuja muistamalla ne ulkoa. Vaikuttaisi siis siltä, että tässä vaiheessa tärkeintä olisi panostaa vielä eri strategioiden käyttöön, jotta oppilaat muistaisivat jonkin keinon, miten he pystyvät ratkaisemaan laskun, jos ei vielä muista sitä ulkoa.

Koska kokeiden perusteella oppilaat olivat kuitenkin ymmärtäneet kertolaskun käsitteen sekä vaihdannaisuuden merkityksen hyvin, vaikuttaa siltä, että oppimateriaalin perustana oleva kielentäminen sekä Solmu-ohjelman lukumääräpalat soveltuvat hyvin kertolaskun opetuksen taustalle. Näyttäisi siltä, että niiden avulla päästään käsitteen ymmärtämistä korostaviin oppimistuloksiin. Toisaalta myös oppilaat itse olivat kokeneet kielentämisen neljän kielen mallin sekä Solmu-ohjelman lukumääräpalat hyödyllisenä kertolaskun oppimisen kannalta, sillä selvästi suurin osa oppilaista oli sitä mieltä, että lukumääräpalat, kuvat ja toisen oppilaan omin sanoin selittäminen auttavat heitä ymmärtämään kertolaskuja ja niiden laskemista. Mielenkiintoista oli se, että vaikka lukumääräpalojen avulla laskeminen oli yksi ikävimmäksi valittujen tehtävien joukosta, koska se oli liian tylsää tai helppoa, oli 19 oppilasta kuitenkin todennut, että lukumääräpalojen käyttö oli ollut hyödyllistä heidän oppimisensa kannalta.

Oppimateriaalin ensimmäinen version tehtävät ja harjoitukset vaikuttivat muodostavan toimivan kokonaisuuden. Tosin kehittämistutkimuksen hengen mukaisesti tutkimuksen aikana oppimateriaalissa ilmeni myös monia kehityskohteita. Oppilaiden näkökulmasta materiaalin tehtävät ja harjoitukset jakoivat hyvin mielipiteitä, sillä jokainen tehtävä tuli viikkojen aikana palautteissa valituksi sekä kivoimpana että ikävimpänä tehtävänä tai harjoituksena, mikä jälleen osoittaa, että oppijat ovat erilaisia ja jokaisella on omat mieltymyksensä. Oppilaiden antamien perusteluiden pohjalta tehtävät mielekkäiksi tekevinä ominaisuuksina olivat muun muassa parityöskentely ja

pelillisuus tai kilpailullisuus. Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa ohjataan käyttämään sellaisia työskentelytapoja, jotka kehittävät vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja ja lisäksi pedagogisesti ohjatut pelit on nostettu yhdeksi tärkeäksi työtavaksi (Opetushallitus 2014, 128, 130). Tämänkaltaisten tehtävien ja harjoitusten valinta oppimateriaaliin on siis perusteltua opetussuunnitelman perusteella sekä oppilaiden näkökulmasta.

Valintaa ikävimmäksi tehtäväksi taas oli perusteltu hyvin monella tavalla. Esimerkiksi liian helppo tai tylsä tehtävä ei ollut oppilaiden mielestä mielekäs, mutta toisaalta myös liian vaikeatkaan tehtävät eivät miellyttäneet. Toisaalta taas osa oppilaista oli käyttänyt samoja perusteluja sille, että tehtävä oli ollut mielekäs. Esimerkiksi helppous ja haastavuus esiintyivät molemmat perusteluina sekä mielekkäimmän että ikävimmän tehtävän valinnalle. Myös tämä kertoo siitä, että koska oppilaat ovat erilaisia, on oppimateriaalissa hyvä olla monipuolisia tehtäviä, joissa on helppojen perustehtävien lisäksi myös vähän enemmän haastetta, jotta kaikki oppilaat motivoituisivat työskentelystä.

Tutkivan opettajan näkökulmasta oppimateriaalin tehtävien yhteydessä ilmeni muutamia ongelmia, vaikka kokonaisuuden kannalta oppimateriaali vaikutti olevan jo melko toimiva. Suurin osa näistä tehtävissä esiintyvistä ongelmista liittyy niiden selkeyteen tai eri tehtävien välisen jatkumon puuttumiseen. Yksi merkittävä kehittämiskohde tehtäviin liittyen oli kuitenkin se, että kaikkien sanallisten tehtävien yhteydessä ei ollut kuvatilaa, johon oppilas voisi piirtää kuvan ymmärtämisen tueksi. Sen seurauksena esimerkiksi eräs oppilas oli piirtänyt kuvan monisteen sivuun ja lopuksi kumittanut sen pois, joten hänellä oli ilmeisesti sellainen käsitys, että piirtäminen ei olisi ollut sallittua. Tämä on täysin ristiriidassa sen kanssa, mihin opetuksella pyrittiin, kun siinä piirtäminen valittiin kielentämisen periaatteiden mukaisesti yhdeksi keinoksi jäsentää omaa ajatteluaan ja ymmärrystään. Opetussuunnitelmankin perusteella opetuksen tulisi kehittää oppilaan kykyä ilmaista itseään piirtäen (Opetushallitus 2014, 128). Nämä tehtävät ovat siis ristiriidassa sekä opetussuunnitelman että kehitetyn oppimateriaalin taustalla olevien pedagogisten lähestymistapojen kanssa. Muita yksittäisissä tehtävissä ilmenneitä kehittämistarpeita esittelen tarkemmin seuraavassa alaluvussa.

### *9.3 Oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämiskohteet*

Aineiston analyysin perusteella arvioin oppimateriaalin ensimmäisen version pätevyyttä tutkivan opettajan, oppilaiden ja oppisisältöjen oppimisen näkökulmista. Niiden perusteella oppimateriaalin tehtävistä löytyi useita erilaisia kehittämiskohteita. Suurin osa tehtävien kehittämistarpeista ilmeni tutkivan opettajan näkökulman perusteella eli tarpeet olivat nähtävillä heti oppituntien aikana tai

myöhemmin oppitunneilla kuvattujen videoiden tarkastelun yhteydessä. Osa kehittämistä tarvitsevista tehtävistä vaati vain pieniä korjauksia, mutta muutamien tehtävien kohdalla täytyi tehdä suurempiakin muutoksia tai kehittää kokonaan uusi tehtävä tilalle.

Kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen liittyvissä tehtävissä kehittämistä vaativiksi tehtäviksi osoittautuivat ensimmäinen kertolaskun käsitteeseen liittyvä moniste sekä kertolaskun käsitettä havainnollistava lukumääräpalaharjoitus. Kertolaskun käsitteeseen liittyvän monisteen ongelmana oli se, ettei se toiminut hyvänä jatkumona konkreettisen omenaharjoituksen jälkeen. Vaikka moniste oli tehty oppilaille tuttuun lukumääräpalojen pohjalta pyrkien siihen, että kuviot olisivat lukumääräpaloja kuvaavia ja siten helposti ymmärrettäviä, olivat ne kuitenkin täysin erilaisia verrattuna omena-harjoitukseen, jolla koko kertolaskujakso on tarkoitus aloittaa. Siten havaintojeni sekä oppilaiden monisteiden perusteella oppilailla näytti olevan hankaluuksia yhdistää nämä uudenlaiset kuviot kertolaskun käsitteeseen, jolloin kuvioiden piirtämisessä kertolasku oli jopa sekoitettu yhteenlaskuun (ks. luku 9.1). Lukumääräpalaharjoituksessa taas videolta tekemiäni havaintojen perusteella vaikutti siltä, että koko tehtävä oli muotoiltu väärällä tavalla. Koska kyseessä oli vasta toinen oppitunti koko jakson aikana, olisi harjoituksen pitänyt olla opettavaisempi sillä tavalla, että olisimme yhdessä hankkineet vielä jokaiselle konkreettisen kokemuksen siitä, miten otamme paloja esimerkiksi yhden kerran kolme ja toisen kerran kolme, jolloin toiminnasta voidaan muodostaa lasku  $2 \cdot 3$ . Nyt harjoitus oli enemmän vain käsitteen ymmärtämistä testaava, kun tehtävänä oli poimia lukumääräpaloja laatikoista annetun kertolaskun mukaisesti. Seurauksena oli, että tässäkin harjoituksessa oppilaat sekoittivat kertolaskun vielä yhteenlaskuun esimerkiksi ottamalla laatikoista palat 2 ja 3, kun tehtävänä oli muodostaa kertolasku  $2 \cdot 3$  (ks. luku 9.1).

Kertotauluihin liittyvistä tehtävistä kehittämistä tarvitsi viiden kertotauluun liittyvä käsite tehtävä, jonka tarkoituksena oli tutustuttaa oppilaat viiden kertotauluun havainnollistaen sitä ensin konkreettisesti omien käsien sormien avulla ja sen jälkeen kuvioiden avulla. Harjoituksessa oli tarkoituksena, että kertotaulua havainnollisesta yhdessä parin kanssa asettamalla ensin toisen oppilaan yksi käsi pöydälle, jonka jälkeen muodostetaan lasku  $1 \cdot 5$ . Sen jälkeen saman oppilaan toinen käsi laitetaan pöydälle ja muodostetaan lasku  $2 \cdot 5$ , jonka jälkeen toisen oppilaan käsi otetaan mukaan ja muodostetaan lasku  $3 \cdot 5$ . Lopulta myös toisen oppilaan toinen käsi laitetaan pöydälle ja muodostetaan lasku  $4 \cdot 5$ , jonka jälkeen loppu kertotaulu käydään läpi yhteisesti taululla käsikuvien avulla. Havaintojeni perusteella oppilaat eivät osanneet hyödyntää parin käsiä asian havainnollistamisessa. Vaikutti siltä, että oppilaille oli enemmän hyötyä pelkästään taululla olleista kuvista.

Vaihdannaisuuden havainnollistamiseen tarkoitettu harjoitus, jossa hyödynnettiin multiplikarettia, ei havaintojeni perusteella vaikuttanut pätevältä vaihdannaisuuden

havainnollistamiseen. Multiplikareen kuvioissa valmiina olevat ympyröinnit, paperin taitokset sekä uudet kuvioiden ympyröinnit muodostivat lopulta melko sekavan kokonaisuuden, josta vaihdannaisuus ei hahmottunut riittävän hyvin. Toisaalta myös myöhemmät havaintoni osoittivat, että osa oppilaista ei käyttänyt vaihdannaisuutta hyödykseen laskiessaan, joten saattaa olla, että sen opettamiseen olisi vaadittu jotain vielä konkreettisempaa kuin kuvio, jotta oppilaat todella olisivat saaneet kokemuksen siitä, että vastaus on sama, vaikka luvut ovat toisin päin.

Laskusujuvuuden harjoittamiseen liittyvissä tehtävissä havaintojeni perusteella esiin noussut ongelma oli se, että osa oppilaista ei itsenäisesti huomannut hyödyntää kertolaskun vaihdannaisuutta tai tukilaskuja, jos ei muistanut laskun tulosta vielä ulkoa. Tehtävissä olisi siis hyvä olla jonkinlainen muistutus niiden hyödyntämisestä, jolloin opettajan ei tarvitsisi aina käydä neuvomassa niiden käyttöön, vaan oppilaat huomaisivat sen itsekin. Lisäksi viimeisellä oppitunnilla tehtyjen havaintojen sekä kokeen perusteella laskeminen oli osalle oppilaista hankalaa, kun eri kertotaulujen laskut olivat sekaisin. Tällaisia tehtäviä olisi ollut hyvä olla jakson aikana useammin.

Sanallisten tehtävien yhteydestä löytyi myös yksi merkittävä kehittämiskohde. Oppilailta kerättyjen monisteiden perusteella jokaisen sanallisen tehtävän kohdalla olisi hyvä olla erikseen tila piirtämistä varten (ks. luku 8.3.3). Koska kaikkien sanallisten tehtävien kohdalla näin ei ollut, oli osa oppilaista joutunut piirtämään kuvion monisteen reunaan. Yksi oppilas oli todennäköisesti jopa kuvitellut, ettei kuvaa saisi piirtää ja kumittanut sen lopuksi pois tehtävän viereltä. Oppimateriaali kuitenkin perustuu sen pohjalle, että opetuksessa käytetään oppimisen ja ymmärtämisen tukena eri kieliä, myös kuviokieltä, joten oppilaalle oli mahdollisesti jäänyt vääränlainen käsitys. Kuvatilan jättäminen jokaisen sanallisen tehtävän kohdalle on siis tärkeää.

Toinen sanallisiin tehtäviin liittyvä kehittämiskohde oli laskutarinatehtävissä. Niissä oppilaiden tehtävänä oli kirjoittaa annetusta kertolaskusta sanallinen tehtävä ja sen jälkeen piirtää siitä vielä kuva. Havaintojeni perusteella osalla oppilaista oli kuitenkin ongelmia muodostaa laskusta oikeanlaista tehtävää. Erityisesti yhdistettyjen laskutoimitusten kohdalla tämä näytti olevan oppilaille haasteellista. Kuitenkin, jos oppilasta neuvoi ensin piirtämään laskusta pelkistetyn kuvion, tehtävän keksiminen helpottui. Sanallisen tehtävän keksimisen jälkeen piirretystä kuvasta ei siis ole oppilaalle apua tehtävän kannalta, mutta ennen tehtävän keksimistä se voisi tukea tehtävän keksimistä.

Edellä mainittujen kehittämiskohteiden lisäksi yksi kehittämisidea tuli oppilailta ja se liittyi lukujonokorttiharjoituksen eriyttämiseen. Havaintojen perusteella oppilaat olivat itse keksineet harjoituksen aikana siihen tavan, jolla sitä voitiin vaikeuttaa. Lukujonokorttiharjoituksessa oppilaiden tehtävänä oli pareittain vuorotellen poistaa lukujonosta yksi tai myöhemmin useampi kortti ja toisen oppilaan tuli aina päätellä, mikä luku puuttuu. Alun perin kortit olivat harjoituksessa rivissä

järjestyksessä pienimmästä suurimpaan, mutta oppilaat olivat keksineet itse, että olisi vaikeampaa, jos kortit olisivatkin alun perin sekaisin. Osa oppilaista kaipasi tehtävään siis lisää haastetta.

Kaikki tehtävissä tai harjoituksissa ilmenneet ongelmat tai kehittämiskohteet on esitetty vielä tiivistetysti taulukossa 5. Lisäksi taulukossa 5 tarjotaan ratkaisuehdotukset näille tehtävissä tai harjoituksissa ilmenneille kehittämistarpeille. Seuraavassa luvussa 10 perehdytään tarkemmin näihin ratkaisuehdotuksiin ja esitellään jatkokehittämisen tuloksena kehitetyt tehtävien ja harjoitusten uudet versiot.

**TAULUKKO 5.** Tehtävissä ja harjoituksissa ilmenneet ongelmat ja kehittämiskohteet sekä ehdotukset niiden ratkaisuiksi

Tehtävä	Tavoite	Ongelmat	Ratkaisuehdotus
Lukumääräpalamoniste	Kertolaskun käsitteen havainnollistaminen kuvion avulla sekä kertolaskun ja yhteenlaskun yhteyden havainnollistaminen	Moniste ei ole hyvä jatkumo sitä edeltävälle omenaharjoitukselle, sillä kuviot eivät liity siihen millään tavalla.	Kehitetään uusi moniste, jossa kuvio toimii jatkumona edeltävälle omenaharjoitukselle.
Lukumääräpalaharjoitus kertolaskun käsitteestä	Kertolaskun käsitteen havainnollistaminen toiminnan ja välineiden avulla	Harjoitus oli enemmän osaamista testaava kuin opettava.	Muutetaan harjoitus yhdessä tapahtuvaksi, havainnollistavaksi opetustuokioksi.
Käsiharjoitus 5:n kertotaulusta	5:n kertotauluun tutustuminen ja sen havainnollistaminen konkreettisesti käsien avulla	Oppilaat eivät osanneet hyödyntää parin käsiä havainnollistamisessa.	Muutetaan harjoitus opettajajohtoiseksi tehtäväksi, jossa oppilaat toimivat itsenäisesti eikä parin kanssa.
Helminauhamoniste, jossa väritettiin helmiä neljä kerrallaan ja muodostettiin lasku	4:n kertotauluun tutustuminen ja sen havainnollistaminen	Helmien värittäminen ei vaikuttanut hyödylliseltä 4:n kertotaulun oppimisen kannalta.	Poistetaan tehtävä oppimateriaalista.
Lukujonokorttiharjoitus parin kanssa	Oppilas oppii liikkumaan lukujonossa eri mittaisin hyppäyksiin	Ylöspäin eriyttämisen tarpeellisuus	Lisätään harjoitukseen vaihtoehdoksi oppilaan keksimä haastavampi versio.
Multiplikareharjoitus vaihdannaisuuden yhteydessä	Vaihdannaisuuden periaatteen havainnollistaminen	Havainnollistus oli liian sekava eikä riittävän konkreettinen.	Käytetään havainnollistuksessa multiplikareen sijaan lukumääräpaloja.

(jatkuu)



**TAULUKKO 5.** (jatkuu)

Tehtävä	Tavoite	Ongelmat	Ratkaisuehdotus
Vaihdannaisuusmoniste	Vaihdannaisuuden periaatteen ymmärtäminen ja harjoittelu	Tehtävissä ei osoiteta, että toinen tapa on aina helpompi, minkä vuoksi sitä kannattaisi hyödyntää.	Lisätään tehtävä, jossa täytyy kahdesta laskusta ympyröidä, kumpi oli helpompi laskea.
Vaihdannaisuuden opettamisen jälkeiset monisteet, joissa on mekaanista laskemista	Sujuvan laskutaidon kehittäminen	Osa oppilaista ei itse muista käyttää vaihdannaisuutta tai tukilaskuja laskemisen apuna.	Lisätään monisteisiin näkyviin muistutus vaihdannaisuuden ja tukilaskujen käytöstä.
Kertaustehtävämoniste	Sujuvan laskutaidon kehittäminen	Oppilaat hämääntyivät, kun kertausmonisteessa ja kokeessa oli eri kertotauluja sekaisin.	Lisätään oppimateriaaliin uusia monisteita, joissa on sekaisin eri kertotaulujen laskuja.
Monisteiden sanalliset tehtävät	Kertolaskun soveltamisen harjoittelu	Kaikissa sanallisissa tehtävissä ei ollut kuvatilaa piirtämistä varten.	Lisätään kaikkien sanallisten tehtävien yhteyteen tila piirtämistä varten.
Laskutarina: sanallisen tehtävän keksiminen	Kertolaskun käsitteen ymmärtäminen ja kertolaskun soveltaminen	Laskun hahmottaminen ja tehtävän keksiminen suoraan laskulausekkeesta vaikutti osalle oppilaista hankalalta.	Muutetaan tehtävät siten, että ensin piirretään kuvio ja vasta sen jälkeen keksitään sanallinen tehtävä.

# 10 OPPIMATERIAALIIN TEHDYT MUUTOKSET

Seuraavaksi esittelen edellisessä luvussa esitettyihin oppimateriaalin kehittämiskohteisiin keksityt ratkaisut, joiden kautta oppimateriaalia pyrittiin kehittämään vielä paremmin vastaamaan sille asetettuja tavoitteita. Koska oppimateriaalin tehtävät voidaan jakaa neljään eri kategoriaan sen perusteella, mitä aihetta niiden myötä on tarkoitus harjoitella, ryhmittelen myös tehtäville ja harjoituksille tehdyt muutokset näihin kategorioihin jaoteltuina.

Oppimateriaalin ensimmäisen kategorian tehtävät ja harjoitukset liittyvät kertolaskun käsitteen ymmärtämiseen. Niiden myötä oppilaat tutustutetaan kertolaskun käsitteeseen johdonmukaisesti toiminnan ja konkreettisten välineiden, kuvioiden sekä luonnollisen kielen avulla. Oppimateriaalin testauksen perusteella toteutetun arvioinnin myötä tehtävissä ja harjoituksissa ilmeni muutamia kehittämiskohteita, joihin tulee puuttua, jotta ne olisivat oppimisen kannalta mahdollisimman toimivia. Ensinnäkin yhtenä ongelmana oli se, että kertolaskujakson ensimmäiselle oppitunnille tarkoitettussa monisteessa käytettiin alun perin kuviona lukumääräpaloja muistuttavia kuvioita. Sitä ennen kertolaskuun tutustuttiin konkreettisen toiminnan kautta hakemalla korista omenakortteja. Vaikka oppilaat tuntuivat ymmärtävän kertolaskun omenaharjoituksen kohdalla, vaikutti siltä, että oppilaiden oli hankala yhdistää lukumääräpalakuviot kertolaskun käsitteeseen, vaikka lukumääräpalat olivatkin heille ennestään tuttuja. Ratkaisuna tähän ongelmaan monisteen tilalle kehitettiin uusi moniste, jossa kuviona käytetäänkin omenoita, joiden avulla kertolaskuun oli edellisessä harjoituksessa tutustuttu konkreettisesti. Nyt konkreettista sisältäen harjoituksen ja sitä seuraavan monisteen välillä säilyy selvä jatkumo, kun molemmissa operoidaan samoilla asioilla. Uusi moniste on esitetty liitteessä 4(2–3).

Toisena käsitteeseen liittyvissä tehtävissä ja harjoituksissa ilmenneenä ongelmana oli lukumääräpalaharjoituksen muoto. Koska harjoitus on tarkoitettu jakson toiselle oppitunnille, vaikutti siltä, että se oli muodoltaan enemmän oppilaiden ymmärrystä testaava kuin uutta käsitettä opettava. Alun perin harjoitus oli muotoiltu niin, että opettaja sanoi oppilaille kertolaskun ja pyysi heitä ottamaan laatikoista lukumääräpaloja sen mukaisesti. Seurauksena oli, että oppilaat ottivat paloja yhteenlaskun mukaisesti tai he olivat sekoittaneet luvut laskussa toisin päin. Ratkaisuna tähän

ongelmaan harjoitusta muutettiin opetuksellisemmaksi siten, että harjoitellaan kertaa-käsitettä vielä yhdessä konkreettisen toiminnan kautta poimimalla laatikoista paloja yhdessä esimerkiksi yhden kerran kaksi, toisen kerran kaksi ja kolmannen kerran kaksi ja sen jälkeen pohditaan yhdessä, mikä kertolasku toiminnasta ja pöydälle muodostuneesta lukumääräpalamuodostelmasta voidaan muodostaa. Näin kertaa-käsitteen idea konkretisoituu oppilaalle vielä paremmin muunkin konkreettisen välineen kautta kuin vain edellisellä tunnilla olleiden omenakorttien kautta. Myöhemmin harjoituksen aikana tehtävän muotoa voidaan vaihtaa siten, että opettaja antaa valmiiksi laskun ja oppilaat muodostavat sen lukumääräpalojen avulla. Uusi versio tästä harjoituksesta löytyy liitteestä 4(4).

Kolmas käsitteeseen liittyvä tehtävä, jota kehitettiin, oli oman sanallisen tehtävän keksiminen. Tässä tehtävässä oli erityisesti ongelmia vasta yhdistettyjen laskutoimitusten yhteydessä, mutta tehtävän muokkaaminen näytti tarpeelliselta jo jakson alkupuolenkin tehtävissä. Laskun hahmottamista ja tehtävän keksimistä pyrittiin helpottamaan vaihtamalla kuvion ja laskutarinan paikkaa. Alkuperäisessä versiossa oppilaiden tehtävänä oli ensin kirjoittaa laskusta sanallinen tehtävä ja sen jälkeen piirtää siitä kuva tai kuvio. Nyt tehtävää muutettiin tässä kohtaa siten, että ensin oppilaan pitää valita kolmesta yksinkertaisesta kuviosta laskua kuvaava kuvio ja vasta sen jälkeen keksiä siitä sanallinen tehtävä. Näin kuvio tukee laskun hahmottamista ja siten helpottaa sanallisen tehtävän keksimistä. Tämä uusi versio tehtävästä löytyy liitteestä 4(16).

Oppimateriaalin toisen kategorian tehtävät ja harjoitukset liittyvät kertotauluihin. Niiden tavoitteena on saada oppilaat harjoittelemaan eri kertotauluja mahdollisimman monipuolisesti erilaisin työskentelytavoin. Tarkoituksena on, että jokaisen kertotaulun opettelu aloitetaan konkreettisten välineiden kautta, jonka jälkeen käytetään vielä kuviokieltä tukena ja siirrytään matematiikan symbolikieleen. Luonnollista kieltä käytetään koko ajan rinnalla. Näiden tehtävien ja harjoitusten kohdalla ilmeni muutamia kehittämistarpeita ja lisäksi kategoriaan tuli yksi uusi tehtävä lisää ja yksi jätettiin kokonaan pois.

Ensinnäkin viiden kertotauluun liittyvän käsiharjoituksen ongelmana oli se, että oppilaat eivät osanneet käyttää parinaan olevan toisen oppilaan käsiä hahmottamisen tukena. Vaikutti siltä, että oppilaat hyötyivät enemmän taululla olevista käsikuvioista kuin pulpetilla olleista omista tai varsinkaan parin käsistä. Ratkaisuna harjoitusta muutettiin siten, että oppilaat eivät enää työskentele pareittain, vaan viiden kertotaulun kaksi ensimmäistä laskua käydään läpi omien käsien ja sormien avulla ja sen jälkeen koko loppu kertotaulu katsotaan yhdessä taululla olevien käsikuvioiden avulla. Harjoituksen uusi muokattu versio on nähtävillä liitteessä 5(6).

Toinen kertotauluihin liittyvä harjoitus, jossa oli kehittämistarpeita, oli lukujonokorttiharjoitus, johon osa oppilaista näytti kaipaavan lisää haastetta. Harjoituksessa oppilaat työskentelivät pareittain

ja tehtävänä oli vuorotellen poistaa lukujonosta yksi luku ja oppilaista toisen tehtävänä oli päätellä, mikä puuttuu. Alkuperäisessä versiossa lukujonokortit asetettiin aina järjestykseen pienimmästä suurimpaan. Harjoituksen aikana eräs pari oli kuitenkin keksinyt vaikeuttaa tehtävää asettamalla kortit sekalaiseen järjestykseen, jolloin puuttuvan kortin päättelemine oli vielä hankalampaa. Tämä oppilaiden keksimä haastavampi versio otettiin alkuperäiseen harjoitukseen mukaan yhdeksi vaihtoehdoksi ja tämä päivitetty versio harjoituksesta on nähtävillä liitteessä 5(16).

Kolmas kertotauluihin liittyvissä tehtävissä ilmennyt ongelma tuli esiin sanallisten tehtävien kohdalla. Osassa sanallisista tehtävistä ei ollut ollenkaan tilaa kuvion piirtämistä varten, vaikka se olisi selvästi ollut ainakin joillekin oppilaille tarpeellista ja toisaalta sen puuttuminen oli myös ristiriidassa oppimateriaalin taustalla olevia periaatteita kohtaan. Ratkaisuna tähän kaikkiin sanallisiin tehtäviin lisättiin tila ja ohjeistus kuvion piirtämistä varten. Lisäksi kuten edellisen kategorian kohdalla jo todettiin, oman sanallisen tehtävän keksimisen yhteydessä kuvio olisi hyvä olla ensin, jotta sitä voi käyttää tehtävän keksimisen tukena. Sen vuoksi myös laskutarinatehtävää muokattiin siten, että ensin oppilaan tehtävän on piirtää yksinkertainen kuvio annetusta laskusta ja vasta sen jälkeen keksiä siitä itse sanallinen tehtävä. Nämä sanallisiin tehtäviin ja kuvioihin liittyvät muutokset ovat nähtävillä tehtävissä, jotka löytyvät liitteistä 5(5), 5(8) ja 5(12).

Neljäs kertotauluihin liittyvä ongelma tuli esiin laskusujuvuuden yhteydessä. Ensinnäkin osa oppilaista ei itsenäisesti käyttänyt vaihdannaisuutta ja tukilaskuja hyödyksi laskiessaan. Toiseksi vaikutti siltä, että kertaustehtävien yhteydessä oppilailla oli paljon hankaluuksia, kun eri kertotaulujen laskut olivat sekaisin. Ratkaisuksi tähän laskusujuvuuden ongelmaan tehtiin useampia muutoksia. Ensinnäkin kahteen tehtävämonisteeseen (liite 5(9) ja liite 5(12)) lisättiin vaihdannaisuustehtävien kohdalle ohjeeksi ympyröidä kahdesta laskusta se, kumpi oli helpompi laskea. Alkuperäisissä versioissa tehtävänä oli vaan laskea esimerkiksi laskut  $4 \cdot 2$  ja  $2 \cdot 4$ . Nyt uudella versiolla pyrittiin kiinnittämään oppilaiden huomio siihen, että lasku voi olla helpompi laskea toisin päin ja silloin sitä kannattaa käyttää hyödyksi. Lisäksi kehitettiin kokonaan yksi uusi moniste, jossa on eri kertotaulujen laskuja sekaisin. Monisteessa on neljä erilaista pientä laatikkoa, jotka on tarkoitettu leikattavaksi pieniksi monisteiksi. A-laatikossa on sekaisin  $10:n$ ,  $5:n$  ja  $2:n$  kertotaulujen laskuja, B-laatikossa lisäksi vielä  $4:n$  kertotaulun laskuja ja C- ja D-laatikossa on sekaisin kaikkien jakson aikana opittujen kertotaulujen laskuja. Nämä eri laatikot on tarkoitettu tehtäväksi jakson eri vaiheissa, kun on opittu tietyt kertotaulut, jotta niitä tulisi harjoiteltua myös sekaisin. Monisteisiin laitettiin myös puhekuplat, jotka kehottavat käyttämään vaihdannaisuutta ja tukilaskuja apuna, jotta oppilaat oppisivat hyödyntämään niitä laskiessaan. Tämä uusi moniste löytyy liitteestä 5(23).

Lisäksi tämän kertotaulukategorian tehtävistä ja harjoituksista jätettiin kokonaan pois neljän kertotauluun liittyvä helminauhamoniste, jossa tehtävänä oli värittää kerrallaan yhdestä helmirivistä

aina neljä helmeä ja sen jälkeen kirjoittaa kertolasku siitä, montako helmeä oli väritetty. Vaikutti siltä, ettei helmien värittäminen auttanut hahmottamaan neljän kertotaulua eikä se ollut oppilaille mieleinen. Näistä syistä helminauhamoniste päätettiin jättää oppimateriaalista kokonaan pois.

Kolmannen kategorian tehtävissä ja harjoituksissa tarkoituksena on harjoitella vaihdannaisuutta ja yhdistettyjä laskutoimituksia konkreettisten toimintavälineiden, kuvioiden ja luonnollisen kielen avulla. Näihin tehtäviin ja harjoituksiin tehtiin yksi isompi muutos ja kaksi pientä parannusta. Isompi muutos liittyy harjoitukseen, jolla ensimmäisen kerran havainnollistetaan vaihdannaisuutta. Alkuperäisessä harjoituksessa käytettiin oppilaiden tekemää kahden kertotaulun multiplikarettia. Koska multiplikare oli tehty kahden kertotaulusta, oli siinä valmiiksi kuvioita, joissa yhden ympyrän sisällä oli aina kaksi palloa ja nämä kahden ryhmät olivat allekkain. Vaihdannaisuuteen tutustuttaessa multiplikare avattiin esimerkiksi siten, että näkyvillä oli kuvio, jossa oli kolme kahden pallon ryhmää. Tarkoituksena oli yhdessä pohtia, millä muulla tavalla pallot voitiin ympyröidä ja mikä kertolasku kuviosta silloin voitiin muodostaa. Näin samasta kuviosta saatiin tehtyä kaksi kertolaskua ( $3 \cdot 2$  ja  $2 \cdot 3$ ) ja huomattiin, että vastaus oli sama, vaikka luvut olivatkin eri päin. Multiplikareesta tuli kuitenkin hyvin sekava, kun siinä oli jo valmiita ympyröintejä sekä paperin taitoksia ja lisäksi tuli vielä uusia ympyröintejä. Toisaalta oppilaat eivät myöskään saaneet konkreettista kokemusta, kun työskenneltiin heti pelkkien kuvioiden varassa. Ratkaisuksi tähän sekavuuteen ja konkretian puuttumiseen multiplikareharjoitus päätettiin jättää kokonaan pois ja sen tilalle kehitettiin uusi lukumääräpalaharjoitus, jossa vaihdannaisuutta päästään harjoittelemaan konkreettisesti välineiden avulla muodostamalla paloista kaksi laskua, joissa luvut ovat eri päin. Asettamalla nämä kaksi paloista muodostettua laskua päällekkäin huomataan, että vastaus todella on sama. Tämä uusi vaihdannaisuuteen liittyvä lukumääräpalaharjoitus löytyy liitteestä 6(1).

Lisäksi tämän kategorian monisteisiin tehtiin kaksi samankaltaista muutosta kuin on jo edellisen kategorian kohdalla esitelty. Vaihdannaisuusmonisteeseen (liite 6(2–3)) lisättiin yhteen tehtävään ohjeeksi ympyröidä kahdesta laskusta, joissa luvut ovat samat mutta eri päin, se kumpi niistä oli helpompi laskea. Tällä pyrittiin havainnollistamaan vaihdannaisuuden hyödyllisyyttä. Lisäksi yhdistettyihin laskutoimituksiin liittyvään laskutarinamonisteeseen tehtiin muutos tehtävien järjestykseen. Alkuperäisessä monisteessa ensin keksittiin tehtävä ja sen jälkeen piirrettiin kuva. Nyt uudessa versiossa piirretään ensin annettu laskusta yksinkertainen kuvio, jota voidaan käyttää tukena seuraavassa tehtävässä eli oman sanallisen tehtävän keksimisessä. Tämä uusi versio monisteesta on nähtävillä liitteessä 6(8).

Neljänteen kategoriaan, joka koostuu kertausmonisteesta ja kokeesta, ei tehty kuin yksi pieni lisäys kertausmonisteeseen. Koska erityisesti kertausmoniteen kohdalla tuli esiin, että oppilailla oli hankaluuksia, kun kaikkien kertotaulujen laskuja oli sekaisin, lisättiin tämän tehtävän kohdalle vielä

muistutus vaihdannaisuuden ja tukilaskujen käytöstä apuna laskemisessa. Tämä pienellä lisäyksellä päivitetty kertausmoniste löytyy liitteestä 7(1).

Näiden edellä esiteltyjen arviointien pohjalta tehtyjen muutosten lisäksi oppimateriaaliin tehtiin vielä muutama järkevältä vaikuttanut kuvioihin liittyvä muutos, joilla pyritään lähinnä kuvioden selventämiseen ja tehtävän ulkomuodon parantamiseen. Ensinnäkin lukumääräpalojen yhteydessä käytettyyn kymppikehykseen tehtiin täyden kymmenen rajaa selventävä muutos. Alun perin rajakohtaan oli piirretty punainen viiva, jotta oppilaat hahmottaisivat sen avulla helposti täyden kymmenen rajan. Koska lukumääräpalat ovat läpinäkyviä, on täysien kymmenien rajat helposti nähtävissä myös kymppikehysten eri väristen taustojen avulla. Muutoksena kymppikehyksiin siis lisättiin taustavärit, jotka ovat hieman eri sävyiset, jolloin täyden kymmenen raja erottuu selvästi. Tällaiset kaksi eri taustaväristä kymppikehystä löytyvät liitteistä 4(4) ja 5(13). Toinen kuviota selventävä muutos tehtiin lukumääräpalamonisteeseen (liite 4(5–6)). Alun perin monisteessa olevat lukumääräpaloja mallintavat kuviot oli tehty siten, että joka toisessa palassa olevat pallot olivat valkoisia ja joka toisessa mustia ja palojen reunat oli piirretty mustalla viivalla. Kuviota muokattiin selvemmäksi siten, että kaikista palloista tehtiin mustia, jotta jokainen lukumääräpalakuvio olisi samanlainen, koska niin myös kaikki samat lukumääräpalat ovat samanvärisiä. Lisäksi lukumääräpalojen reunaviivat muokattiin värillisiksi, jotta ne erottuvat paremmin taustalla olevasta kymppikehyksestä. Samat muutokset tehtiin myös korttiharjoituksessa (liite 4(8) ja liite 4(13)) olleisiin lukumääräpalakuvioihin.

# 11 POHDINTA

Tässä luvussa pohdin vielä koko kehittämistutkimusprosessin onnistumista, tutkimuksessa tehtyjen valintojen pätevyyttä ja sitä, mitä tällä tutkimuksella saavutettiin. Lisäksi pohdin tutkimuksen luotettavuutta kehittämistutkimuksen ominaispiirteiden näkökulmasta sekä tarkastelen tutkimuksen toteutumista eettisyyden kannalta. Lopuksi esitän vielä muutamia jatkotutkimusmahdollisuuksia.

## *11.1 Pohdintaa ja arviointia tutkimusprosessista*

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli perehtyä kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen opettamiseen ja oppimiseen. Varsinaisena tutkimustehtävänä oli kehittää kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen opettamiseen soveltuvaa oppimateriaalia toiselle vuosiluokalle. Tutkimus toteutettiin kehittämistutkimuksena siten, että aluksi tutkimuksessa kehitettiin ongelma-analyysin pohjalta oppimateriaalista ensimmäinen versio, jota testattiin käytännössä opettamalla kertolaskujakso sen mukaisesti toisen vuosiluokan oppilaille. Testaamisen perusteella oppimateriaalia arvoitiin monesta eri näkökulmasta ja kehitettiin edelleen. Tutkimuksen lopputuloksena on oppimateriaalin toinen versio, joka on kokonaisuudessaan esitetty liitteissä 3–7.

Koska tutkimus toteutettiin kehittämistutkimuksena, on tutkimuskysymykset muodostettu sen mukaisesti. Ensimmäisellä tutkimuskysymyksellä selvitettiin ongelma-analyysin sekä opetuskokeilun perusteella, millaiset tekijät ovat merkittäviä kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen oppimisessa ja opettamisessa. Tärkeimmäksi kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen opettamisen tekijäksi ilmeni oikeanlaisen tasapainon löytäminen eri painotusten välille. Kertolaskun käsitteen ymmärtämisen ja kertotaulujen ulkoa oppimisen tai kertolaskujen laskemisen sujuvuuden välille tulisi löytää tasapaino, jotta lopputuloksena oppilaat ymmärtäisivät kertolaskun käsitteen, ja lisäksi heillä olisi sujuva kertolaskujen laskemisen taito. Samoin vaihdannaisuuden oikeanlaisen ymmärtämisen sekä sen käytön hyödyllisyyden korostamisen välille tulisi löytää tasapaino siten, että lopputuloksena oppilaat osaisivat ja uskaltaisivat käyttää vaihdannaisuutta hyödykseen laskiessaan, muttei heille kuitenkaan jäisi virheellistä käsitystä, että laskun kirjoitusjärjestyksellä ei olisi merkitystä. Tällainen tasapainon löytäminen eri painotusten välille lienee ylipäättään tärkeää minkä tahansa asian opetuksen yhteydessä.

Toisena tutkimuskysymyksenä oli, millaisena tutkimuksen aikana kehitetyn oppimateriaalin ensimmäinen versio koettiin opetuskokeilussa. Tässä kysymyksessä näkökulmina olivat oppisisältöjen oppimisen näkökulma, tutkivan opettajan näkökulma sekä oppilaiden näkökulma. Näiden näkökulmien perusteella oppimateriaali vaikutti kokonaisuudessaan onnistuneelta, vaikka monia kehittämiskohteita seuraavaa versiota varten löytyikin. Oppimateriaalin arviointi monesta eri näkökulmasta lisää sen luotettavuutta, vaikka kaikkia aineiston osia ei välttämättä voida pitää yhtä laadukkaina ja luotettavina, mitä tarkastelen vielä myöhemmin tässä luvussa. Useat eri näkökulmat mahdollistivat kuitenkin oppimateriaalin arvioinnin monipuolisuuden, jolloin kehittämiskohteitakin tuli esiin monipuolisesti. Esimerkiksi pelkkien kokeiden ja tehtävämönisteiden tarkastelu ei olisi ollut riittävää, sillä silloin arvioinnin ulkopuolelle olisivat jääneet toiminnalliset harjoitukset, joista ei jää kirjallista materiaalia. Toisaalta taas pelkät oppituntivideot ja havaintopäiväkirja olisivat sulkeneet ulkopuolelle kaikki kirjalliset tehtävät. Lisäksi oppilaiden oma näkökulma on tärkeä, sillä kyse on kuitenkin heidän oppimisestaan ja työskentelystään. Monipuolinen arviointi oli siis oppimateriaalin kokonaisuuden arvioinnin kannalta tärkeää.

Keskeisimpänä huomiona oppimateriaalin arvioinnissa oli kuitenkin se, millaisiin oppimistuloksiin testaukseen osallistuneet oppilaat pääsivät opiskeltuaan oppimateriaalin mukaisesti. Kaiken kaikkiaan oppilaat menestyivät jakson loppukokeessa hyvin, mutta huomionarvoisempaa on keskittyä siihen, millaisia hankaluuksia heillä kokeen perusteella vielä oli. Vaikutti siltä, että oppilaat olivat hyvin ymmärtäneet kertolaskun käsitteen, mutta kertotaulujen ulkoa oppiminen osoittautui osalla oppilaista vielä haasteeksi. Tämä sama huomio tuli esiin jo jakson viimeisten oppituntien aikana, kun eri kertotaulujen laskuja laskettiin sekaisin. Vaikka käsitteen ymmärtäminen onkin kaiken perusta, on laskusujuvuus myös toinen merkittävä tekijä, kun on kyse kertolaskun osaamisesta. Voi siis pohtia, jäikö ainakin oppimateriaalin ensimmäisessä versiossa kertolaskujen mekaaninen harjoittelu liian vähälle huomiolle. Toisaalta ymmärtämistä voi pitää kuitenkin tärkeämpänä jatkoon kannalta. Nyt kun kertolaskun käsite on kunnolla ymmärretty, on helpompaa keskittyä mekaanisen laskutaidon sujuvuuden harjoitteluun. Toisin päin tilanne olisi huomattavasti haastavampi. Toisaalta hyvän käsitteellisen ymmärryksen ansiosta oppilaat ovat nyt valmiita oppimaan ulkoa siten, että kertotaulut eivät jää vain merkityksettömiksi ulkoa opituiksi laskutoimituksiksi ja niiden tuloksiksi.

Kolmantena tutkimuskysymyksenä oli, millaisella oppimateriaalilla voidaan tukea kertolaskun käsitteen ymmärtämistä ja kertotaulujen 1–5 ja 10 oppimista toisella vuosiluokalla. Tähän kysymykseen saatiin osittain vastaus luvussa 8.1, jossa esitellään kehittämisen perustaksi valittuja tekijöitä ja toisaalta luvussa 8.2, jossa on esitetty yleisluontoinen kuvaus oppimateriaalin ensimmäisestä versiosta. Lopullinen vastaus tähän kysymykseen on esitetty liitteissä 3–7, joista



löytyy kokonaisuudessaan tässä tutkimuksessa kehitetyn oppimateriaalin toinen versio. Koontina voidaan todeta, että tällaiseksi kertolaskun opetukseen soveltuvaksi oppimateriaaliksi muotoutui monipuolinen kokonaisuus kertolaskun käsitteeseen, kertotauluihin, vaihdannaisuuteen ja yhdistettyihin laskutoimituksiin liittyvistä tehtävistä ja harjoituksista, joissa hyödynnetään monipuolisesti eri tapoja ilmaista omaa matemaattista ajattelua.

Kielentäminen vaikutti soveltuvan hyvin pedagogiseksi lähestymistavaksi oppimateriaalin tehtävien ja harjoitusten taustalle. Eri kielten käyttö teki opetuksesta monipuolista, kun esimerkiksi kertolaskun käsitettä lähestyttiin konkreettisen toiminnan, konkreettisten välineiden sekä kuvioden kautta. Lisäksi luonnollista kieltä käytettiin koko ajan opetuksessa mukana. On hyvin mahdollista, että tällainen monipuolinen lähestymistapa kertolaskun käsitteeseen, on syynä siihen, että oppilaat tuntuivat sisäistäneen käsitteen niin hyvin. Myös kertotauluja lähestyttiin aina yhtä monipuolisesti eri kielten kautta. Voidaan kuitenkin pohtia, veikö tämä monipuolinen lähestymistapa toisaalta tilaa ja aikaa mekaanisen laskusujuvuuden harjoittamiselta. Kuitenkin ymmärtävä oppiminen, johon monipuolisella lähestymistavalla pyrittiin, toimii kaiken pohjana, joten tällainen monipuolinen lähestyminen myös kertotauluihin on siten perusteltua. Tässäkin tapauksessa oikean tasapainon löytäminen monipuolisen opetustavan ja mekaanisen harjoittelun välille lienee oikea tapa järjestää opetus parhaalla mahdollisella tavalla.

Lukumääräpalojen käyttö oppimateriaalin keskeisinä toimintavälineinä vaikutti myös oikealta valinnalta. Vaikka ne alun perin valittiin mukaan osittain sen vuoksi, että testaajina olleet oppilaat olivat käyttäneet niitä opetuksessaan koko edellisen vuoden ja jatkumo siihen haluttiin säilyttää mahdollisimman hyvin, vaikuttivat ne ominaisuuksiensa puolesta pätevältä valinnalta juuri kertolaskun oppimisen tueksi. Ensinnäkin se, että jokaista lukua varten on valmiiksi olemassa oma palansa, jossa on lukumäärää vastaava määrä palloja, on kertolaskun käsitteen ymmärtämisen kannalta hyvä. Tällä tavalla paloissa hahmottuu hyvin se, että kertolaskussa lasketaan keskenään yhtä suuria ryhmiä. Koska tiettyä lukumäärää kuvaavat palat ovat jo valmiiksi olemassa, ei lukuja tarvitse erikseen koota esimerkiksi yksittäisistä palikoista. Lisäksi läpinäkyvät lukumääräpalat muodostavat niiden taustalla käytettävien kymppikehysten kanssa hyvän visuaalisen tuen kertolaskujen laskemiselle. Toiseksi se, että lukumääräpaloja voi rakentaa toistensa kanssa päällekkäin on myös hyvä ominaisuus kertolaskun vaihdannaisuuden opettamisen kannalta. Tällöin oppilaat voivat rakentaa päällekkäin kaksi laskua, joissa luvut ovat samat mutta eri päin, jolloin he konkreettisesti näkevät, että niiden vastaukset ovat samat. Lukumääräpaloilla on siis useita ominaisuuksia, jotka tukevat kertolaskun käsitteen ja sen ominaisuuksien oppimista.

Menetelmänä kehittämistutkimus oli tässä tutkimuksessa pätevä ja mahdollisesti jopa ainut mahdollinen valinta, kun tarkoituksena oli tutkimuksen myötä kehittää uusi

oppimateriaalikokonaisuus kertolaskun opetukseen. Kehittämistutkimuksen vaiheet ja syklisyys toteutettiin tämän tutkimuksen puitteissa melko hyvin. Alun teoreettisen ongelma-analyysin myötä saatiin hyvä pohja oppimateriaalin kehittämiseksi. Lisäksi pienimuotoisesti toteutetun empiirisen ongelma-analyysin, jossa tarkasteltiin olemassa olevia oppikirjoja kertolaskun osalta, myötä saatiin hyvin perusteltua se, miksi juuri tällainen oppimateriaali on tarpeellista. Tosin tämä oppikirjakatsaus toteutettiin niin pienessä mittakaavassa, että sen tuloksia voi lähinnä pitää vain viitteenä siitä, etteivät oppikirjat hyödynnä piirtämistä ja konkreettisten välineiden käyttöä. Tyypillisesti konkreettisten välineiden käyttö on ohjeistettu opettajan oppaissa, jotka tämän tutkimuksen rajoissa jätettiin pois tarkastelusta. Lisäksi tämä tutkimus ajoittui siten, että Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 tulivat voimaan tutkimuksen puolivälissä, joten sen mukaiset oppikirjatkin ilmestyivät vasta siinä vaiheessa. Sen vuoksi oppikirjakatsaus ei ole ihan ajan tasalla, sillä tässä tutkimuksessa tarkasteltiin vanhan opetussuunnitelman (2004) mukaisten kirjojen lisäksi vain kahta uuden opetussuunnitelman (2014) mukaista kirjaa. Kuitenkin se on varmaa, ettei lukumääräpaloista ole kertolaskuun liittyvää oppimateriaalia, joten erityisesti sen osalta tämän tutkimuksen tehtävät ja harjoitukset ovat uudenlaisia.

Ongelma-analyysin jälkeen tutkimus eteni kehittämistutkimuksen mallin mukaisesti. Oppimateriaalia kehitettiin ja sitä testattiin käytännössä sekä arvioitiin. Sen jälkeen arvioinnin perusteella oppimateriaalista kehitettiin vielä uusi paranneltu versio, joten kehittämistutkimukselle ominainen syklinen luonne on toteutunut tässä tutkimuksessa hyvin. Voidaan siis todeta, että kehittämistutkimuksen kolme ominaispiirrettä eli ongelma-analyysi, kehittämisprosessi ja kehittämistuotos kuvaavat hyvin myös tämän tutkimuksen vaiheita.

Yhtenä kehittämistutkimuksen haasteena voidaan Heikkisen ja kollegoiden (2007, 71–72) mukaan pitää tutkimusprosessiin liittyvää työläyttä. Usein kehittämistutkimuksessa käytetään useampia eri menetelmiä ja aineistoja, jolloin aineistosta muodostuu helposti monimutkainen ja monitasoinen. Se taas johtaa siihen, että tutkimuksen ja päätelmien tekeminen on haastavaa. Tässäkin tutkimuksessa aineiston määrä oli hyvin suuri ja laadultaan aineisto oli melko monipuolinen, mikä toi omat haasteensa analyysin tekemiselle. Aineiston käsittely oli monimutkaista ja erityisen haastavaa oli tarkastella aineistoa objektiivisesti valiten sieltä kaikki tutkimustavoitteen kannalta relevantit asiat. Aineistoa kuitenkin pyrittiin tarkastelemaan mahdollisimman objektiivisesti ja toisaalta se, että aineiston keräämisen ja käsittelyn väliin jäi lähes vuosi aikaa, helpotti objektiivisten tulkintojen tekemistä.

Tämän tutkimuksen aineistoa voidaan tarkastella myös sen laadukkuuden näkökulmasta. Ensinnäkin voidaan pohtia, miten luotettavasti toisen vuosiluokan oppilaat pystyvät tuomaan omat mielipiteensä ja käsityksensä ilmi kyselylomakkeissa. Vaikka lomakkeista oli pyritty tekemään

mahdollisimman yksinkertaiset, kun esimerkiksi Likert-asteikkokin oli laadittu hymiöiden muotoon, ei silti ole varmaa, miten selkeinä ne näyttäytyivät oppilaiden näkökulmasta. Luultavasti oppilaita haastatteleamalla heiltä olisi voinut saada laadukkaampia ja luotettavampia vastauksia. Voi myös pohtia, miten kykeneviä toisen vuosiluokan oppilaat ovat arvioimaan esimerkiksi erilaisten työskentelytapojen hyödyllisyyttä oman oppimisensa kannalta. Oppilaiden haastattelujen lisäksi myös luokan oman opettajan haastattelu olisi voinut olla tarpeellista, jolloin hänen näkemyksensä asiantuntijana olisi voitu ottaa oppimateriaalin kehittämisessä vielä paremmin huomioon. Nyt opettajan näkemykset on oppimateriaalin kehittämisessä otettu huomioon hänen kanssaan opetusjakson yhteydessä käytyjen keskustelujen perusteella kehittämisprosessin aikana, eikä keskusteluista jäänyt konkreettista materiaalia, johon myöhemmin olisi koko oppimateriaalin arvioinnin yhteydessä voinut palata. Tosin nämä oppilaiden ja opettajan haastattelut olisivat laajentaneet aineistoa entisestään, ja siten aineiston analyysi olisi muodostunut yhä haastavammaksi.

Tässä tutkimuksessa kehitettiin tutkimuspohjaisesti oppimateriaalia kertolaskun opetukseen toisella vuosiluokalla. Koska tutkimus toteutettiin pienellä otoskoollla ( $n=24$ ), ei sen tuloksia sellaisenaan voida yleistää. Tutkimuksessa kehitetyn oppimateriaalin ensimmäistä versiota testattiin vain yhdessä kakkosluokassa, joten ei voida olettaa, että oppimateriaalia käyttämällä päästäisiin samanlaisiin oppimistuloksiin jonkin toisen luokan kanssa. Kuitenkin tutkimuksen myötä kertolaskun opettamisesta ja oppimisesta saatiin sekä teoreettista että empiiristä tietoa, kun aiheeseen perehdyttiin sekä aiemman tutkimuskirjallisuuden että käytännön opetuskokeilun pohjalta. Lisäksi tutkimuksen myötä saatiin tutkimuspohjaisesti kehitettyä, tämän tutkimuksen puitteissa päteväksi todettua oppimateriaalia kertolaskun opetukseen. Vaikkei oppimateriaalia voida sellaisenaan yhdellä luokalla testaamisen perusteella todeta toimivaksi kokonaisuudeksi yleisemmällä tasolla, voidaan sitä kuitenkin varmasti soveltaen käyttää myös muissa konteksteissa. Näin tämän kehittämistutkimuksen myötä matematiikan didaktista tutkimusta ja käytännön matematiikan opetusta on kertolaskuaiheen osalta saatu tuotua lähemmäs toisiaan.

## *11.2 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys*

Tämä tutkimus on toteutettu kehittämistutkimuksena, jota on tutkimuskirjallisuudessa kritisoitu paljon, ja erityisesti kritiikki on kohdistunut sen luotettavuuteen (Pernaa 2013, 18). Muun muassa Dede (2004) on kritisoinut kehittämistutkimusta siitä, ettei sille ole määritelty yhteneviä tutkimuskäytäntöjä ja aineistoa kertyy yleensä niin paljon, että objektiivinen ja puolueeton analyysi on tutkijalle haasteellista. Tässä tutkimuksessa luotettavuutta on kuitenkin pyritty parantamaan monin eri keinoin. Pernaan (2013, 18) mukaan tieteellisen tutkimuksen luotettavuutta arvioidaan tyypillisesti

validiteetin eli pätevyyden ja reliabiliteetin eli luotettavuuden ja toistettavuuden avulla, mutta ne eivät sellaisenaan sovellu laadullisia osioita sisältävän kehittämistutkimuksen luotettavuustarkasteluun, sillä mainitut käsitteet ovat peräisin määrällisen tutkimuksen perinteestä. Kiviniemen (2015, 232) mukaan kehittämistutkimuksen luotettavuutta tulisikin pohtia sen ominaispiirteiden näkökulmasta. Hän tarkastelee kehittämistutkimuksen luotettavuutta kolmesta eri näkökulmasta, jotka ovat prosessivaliditeetti, käytännöllinen validiteetti sekä yleistettävyys. Seuraavaksi tarkastelen tätä tutkimusta näistä näkökulmista käsin.

Prosessivaliditeetilla tarkoitetaan tutkimuksen luotettavuuden arviointia tutkimus- ja kehittämisprosessin hallinnan kannalta, sillä kehittämistutkimuksessa kehittäminen toteutuu vaiheittain tapahtuvana prosessina. Syklisen tutkimusprosessin hallinta ja johdonmukaisuus ovat luotettavuuden kannalta tärkeitä tekijöitä prosessivaliditeetin näkökulmasta. (Kiviniemi 2015, 232–234.) Tässä tutkimuksessa luotettavuutta parantaa prosessivaliditeetin näkökulmasta ensinnäkin se, että tutkimuksessa on ison kehittämissyklin sisällä toteutettu monia pienempiä kehittämissyklejä. Kun oppimateriaalin ensimmäinen versio kehitettiin kokonaisuudessaan vasta testausjakson yhteydessä, on ensimmäisen version kehittäminenkin jo itsessään ollut iteratiivinen prosessi. Jos testaamisen yhteydessä huomattiin, että jokin tehtävä tai harjoitus tai jokin niiden piirre ei ollut sellaisenaan käytännössä toimiva, otettiin se huomioon jo seuraavien tuntien tehtäviä ja harjoituksia kehitettäessä. Täten arviointi on kulkenut koko ajan mukana kehittämisen rinnalla ja arvioinnin tuloksia on hyödynnetty aina seuraavien tuotosten kehittämisessä. Toisaalta myös ison kehittämissyklin näkökulmasta valmiin oppimateriaalin ensimmäinen versio arvioitiin testausjaksolla kerätyn aineiston perusteella ja tämän arvioinnin tuloksia hyödynnettiin oppimateriaalin toisen version kehittämisessä. Tutkimusprosessi on siis edennyt johdonmukaisesti sekä pienen että suuremman mittakaavan sykleissä, joissa kehittäminen, testaaminen, arviointi ja jatkokehittäminen seuraavat toinen toisiaan tuossa mainitussa järjestyksessä.

Toisaalta tutkimuksen luotettavuutta voidaan prosessivaliditeetin näkökulmasta parantaa myös hyödyntämällä useita eri menetelmiä (Kiviniemi 2015, 234). Pernaankin (2013, 21) mukaan kehittämistutkimuksen luotettavuutta voidaan vahvistaa triangulaation avulla ja se voidaan toteuttaa joko metodisena triangulaationa tai aineistoon liittyvänä triangulaationa. Tämän tutkimuksen luotettavuutta on pyritty parantamaan aineistoon kohdistuvalla triangulaatiolla, sillä tutkimuksessa oppimateriaalin ensimmäisen version testausjakson aikana kerätty aineisto koostuu oppilaiden täyttämistä kyselylomakkeista, oppitunneilla kuvatuista videoista, tutkivan opettajan havaintopäiväkirjasta sekä kokeista ja oppitunneilla tehdyistä tehtävämoneista. Laajan ja monipuolisen aineiston ansioista oppimateriaalia on pystytty arvioimaan monesta eri näkökulmasta. Toisaalta aineistoa myös analysoitiin laadullisen sisällönanalyysin lisäksi osittain määrällisestikin,

vaikka pienen aineistokoon vuoksi määrällisen analyysin osuus jäikin lähinnä aineiston kvantitatiiviseksi kuvailuksi.

Lisäksi tutkimuksen luotettavuutta on pyritty prosessivaliditeetin näkökulmasta parantamaan tutkimuksen raportoinnilla, sillä kehittämisprosessin kuvaus on pyritty tekemään mahdollisimman tarkasti. Prosessin eri vaiheet on huomioitu myös tutkimusraportin rakenteessa, sillä raportissa on selvästi nähtävillä oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämisprosessi (luku 8) sekä oppimateriaalin toiseen versioon tehdyt muutokset eli jatkokehittäminen (luku 10).

Käytännöllinen validiteetti on Kiviniemen (2015) mukaan toinen näkökulma, josta käsin kehittämistutkimuksen luotettavuutta voidaan tarkastella. Hänen mukaan käytännöllisellä validiteetilla tarkoitetaan sitä, miten relevantti ja tarkoituksenmukainen tutkimuksessa kehitetty tuotos on käytännössä ja miten sille aluksi asetetut tavoitteet ovat täyttyneet. (emt., 232–235.) Tässä tutkimuksessa pyrittiin löytämään ratkaisua siihen, miten kertolasku voidaan opettaa toisen vuoden oppilailla sillä tavalla, että he ymmärtävät kertolaskun käsitteen ja kertotaulujen toimintaperiaatteen siten, etteivät kertolaskut jää vain mekaanisiksi, ulkoa opituiksi laskutoimituksiksi. Tutkimuksella pyrittiin siis vastaamaan käytännön tarpeeseen ja kehittämistyö on toteutettu kahden teoreettisen pedagogisen lähestymistavan sekä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) ja kertolaskun opetukseen ja oppimiseen liittyvän aikaisemman tutkimuskirjallisuuden pohjalta. Näiden lisäksi luotettavuutta käytännöllisen validiteetin näkökulmasta lisää se, että kehittämistuotosta on kehitetty ja testattu autenttisissa olosuhteissa ja testauksen pohjalta kehitetty edelleen tarkoituksenmukaisemmaksi. Tämä kehittämisprosessin toteutuminen autenttisissa olosuhteissa jo itsestään takaa sen, että kehittämistuotos on käytäntöön soveltuva.

Kolmas luotettavuustarkastelun näkökulmista on Kiviniemen (2015, 232, 234–236) mukaan yleistettävyys, jolla hän tarkoittaa sitä, onko kehittämistuotos ja siihen liittyneet suunnitteluperiaatteet yleistettävissä myös muissa konteksteissa. Tässä tutkimuksessa kehitettyä oppimateriaalia ei ole testattu muissa kuin tämän tutkimuksen kontekstissa, mikä luonnollisesti heikentää tutkimuksen luotettavuutta yleistämisen kannalta. Lisäksi Pernaan (2013, 20) mukaan kehittämistutkimuksen heikkoutena on, että se toteutetaan usein kvalitatiivisena tutkimuksena ja pienellä otoskoolla, jolloin yleistysten tekeminen ei ole mahdollista. Tässäkin tutkimuksessa oppimateriaalia on testattu vain yhden luokan opetuksessa, joten otoskoko jää hyvin pieneksi yleistyksen kannalta. Toisaalta tutkimuksen myötä tutkimuksen aiheesta eli kertolaskun opetuksesta ja oppimisesta saatiin teoriakatsauksen ja kehitetyn oppimateriaalin testauksen myötä selville kertolaskun käsitteen ymmärtämisen ja kertotaulujen oppimisen kannalta merkittäviä tekijöitä (ks. luku 9.1), ja tätä tietoa voidaan mahdollisesti soveltaa yleisemminkin pohjana olevan aikaisemman tutkimuskirjallisuuden vuoksi. Lisäksi tutkimuksen luotettavuutta on yleistettävyyden näkökulmasta pyritty parantamaan

myös sillä, että tutkimusprosessi on raportoitu huolellisesti ja johdonmukaisesti, jotta sen toistaminen toisessa kontekstissa tulisi mahdolliseksi. Oppimateriaalin kehittämisprosessi ja sen taustalla vaikuttavat teoreettiset mallit on esitetty tarkkaan ja myös testausjakson pohjalta tehdyn arvioinnin tulokset ja niiden perusteella löytyneet kehittämistarpeet on esitelty tutkimusraportissa huolellisesti. Lisäksi oppimateriaalin toiseen versioon kehittämistarpeiden pohjalta tehdyt muutokset on pyritty esittelemään ja perustelemaan tarkasti.

Näiden kolmen näkökulman lisäksi tutkimuksen luotettavuutta voidaan tarkastella myös aineiston luotettavuuden näkökulmasta. Yksi aineiston osa koostui tutkimukseen osallistuneiden toisen luokan oppilaiden täyttämistä kyselylomakkeista, joilla pyrittiin selvittämään oppilaiden näkökulmaa oppimateriaalin tehtävistä sekä heidän mielipidettään lukumääräpalojen, kuviokielen ja luonnollisen kielen käytön hyödyllisyydestä oppimisen kannalta. Lisäksi kyselylomakkeella selvitettiin heidän asennettaan matematiikkaa ja kertolaskuja kohtaan sekä näkemystä omista taidoistaan. Koska oppilaat olivat hyvin pieniä, voidaan pohtia, miten luotettavasti he pystyivät kyselylomakkeissa tuomaan esiin omat näkemyksensä ja toisaalta miten hyvin he ymmärsivät kyselylomakkeissa olleet kysymykset. Luotettavuuden parantamiseksi kyselylomakkeet käytiin oppilaiden kanssa kuitenkin etukäteen läpi. Erityisesti Likert-asteikollinen lomake, jossa vastausvaihtoehtoina olivat hymiöt, käytiin yhdessä huolellisesti läpi pohtimalla, mitä eri hymiöt väitteen kohdalla tarkoittavat. Toinen luotettavuuteen vaikuttava tekijä oli se, että oppilaiden ollessa pieniä, ei ole ollenkaan varmaa, miten hyvin he muistivat, mitä viikon aikana tehdyt tehtävät ja harjoitukset olivat olleet. Oppilaiden valinnat mielekkäimmiksi ja ikävimmiksi tehtäviksi viikon tai koko jakson aikana eivät välttämättä vastaa heidän todellisia kokemuksiaan. Toisaalta kokonaisuuden kannalta aineiston laajuus ja monipuolisuus voidaan kuitenkin nähdä tutkimuksen yhtenä vahvuutena ja luotettavuutta merkittävästi parantavana tekijänä, sillä laajan ja monipuolisen aineiston kautta kehitettyä oppimateriaalia pystyttiin arvioimaan hyvin monesta eri näkökulmasta, joten arvioinnin voidaan siltä kannalta nähdä olevan luotettavaa.

Koska tutkimuskohteena olivat lapset, on tutkimuksen toteuttamista erityisen tärkeää tarkastella myös tutkimuksen eettisyyden näkökulmasta. Tässä tutkimuksessa on kaikin puolin pyritty noudattamaan hyviä eettisesti kestäviä tutkimuskäytäntöjä. Ensinnäkin tutkimuksessa oli mukana 7–8-vuotiaita lapsia, joten tutkimukseen tarvittava huoltajien suostumus oli hankittu. Lisäksi oppilaiden huoltajia informoitiin erikseen oppituntien videoinnista. Oppitunnit videoitiin, jotta havaintojen tekeminen tuntien tapahtumista on mahdollista myös jälkikäteen, sillä oppituntien aikainen havainnointi on haastavaa, eikä kaikkea ole mahdollista nähdä kerralla. Videoiden kanssa on pidetty erittäin tarkasti huolta siitä, että vain minä tutkijana voin katsoa niitä, eikä kenelläkään ulkopuolisella ole pääsyä niihin.

Tutkimuksen tulisi aina olla tutkittaville vapaaehtoista. Vaikka huoltajien suostumus olikin olemassa, on tärkeää, että myös tutkimuksen varsinaiset osallistujat eli lapset ovat tietoisia tutkimuksen tekemisestä ja ovat siinä vapaaehtoisesti mukana. Tutkimuspaikalla on kuitenkin merkitystä tutkimuksen teon kannalta vapaaehtoisuuden näkökulmasta. Strandellin (2010, 100) mukaan oppilaiden näkökulmasta ei ole välttämättä selvää, mikä on tutkimusta ja mikä tavallista koulutyötä, jos tutkimus toteutetaan koulun tiloissa. Tämän tutkimuksen toteuttaminen oli kuitenkin osa tavallista koulutyötä, sillä havainnoinnin kohteena olivat matematiikan oppitunnit sekä siellä tehdyt tehtävät ja harjoitukset. Koska tutkimuksen tavoitteena ei ollut tutkia oppilaiden henkilökohtaisia ominaisuuksia, vaan käytännössä tutkimuskohteena olivat oppimateriaalin tehtävät ja harjoitukset, joiden toimivuutta selvitettiin tutkimalla oppitunnilla tapahtunutta toimintaa sekä tunneilla tehtyjä monisteita ja oppilaiden mielipiteitä tehtäviin ja harjoituksiin liittyen, ei vapaaehtoisuutta erityisesti korostettu. Tutkimuksen kohteena ei siis missään vaiheessa ollut yksilöt tai yksilöiden ominaisuudet, vaan kaikkea havaittua peilattiin aina tehtävien ja harjoitusten pätevyyteen. Oppilaille oli kuitenkin tehty selväksi, että opetusjakson aikana tehdään samalla tutkimusta, minkä vuoksi luokassa on aina videokamera. Oppilaat olivat siis koko ajan tietoisia videokameran läsnäolosta eikä vastustusta ilmennyt. Lisäksi kamera oli aina sijoitettuna niin, että videolla oli mukana useampi oppilas, usein jopa koko luokka. Tukiopetuksen yhteydessä, kun mukana oli vain yksittäisiä oppilaita, heiltä pyydettiin erikseen suostumus videointiin ja mikäli sitä ei saatu, jätettiin tuokio kokonaan kuvaamatta. Oppilaille myös korostettiin, että minä tutkijana olen ainut, joka videoita jälkikäteen katsoo. Lisäksi oppilaille oli kerrottu, että tunneilla tehdyt monisteet kerätään tutkimusta varten, ja että heidän täyttämänsä kyselylomakkeet olivat myös osa tätä tutkimusta.

Ihmisiä tutkittaessa yksi tärkeä eettinen normi on ihmisen yksityisyyden kunnioittaminen, johon liittyvät tutkittavan anonymiteetin, itsemääräämisoikeuden ja tietojen luottamuksellisuuden turvaaminen (Kuula 2006, 124). Tähän tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden anonymiteetti suojattiin poistamalla oppilaiden nimet kaikesta aineistosta, ja myöskään oppilaiden koulua tai luokkaa ei mainita tutkimusraportissa. Vaikka monisteissa, kokeissa ja kyselylomakkeissa oli oppilaiden nimet, ne muutettiin tutkimuksessa numerokodeiksi, jotka oppilaille määritettiin satunnaisessa järjestyksessä. Myös videoiden litteroidut keskustelut on koodattu samalla tavalla, joten oppilaiden henkilöllisyys ei paljastu tutkimusraportissa. Itsemääräämisoikeuden näkökulmasta kaikki oppilaat olivat tietoisia tutkimuksen teosta, eikä vastahakoisuutta tutkimukseen osallistumisesta ilmennyt. Tietojen luottamuksellisuus taas on tässä tutkimuksessa turvattu siten, että koko aineisto on tutkimusprosessin ajan ollut pelkästään minun hallussani. Yksityisyyden kunnioittaminen on siis toteutunut tässä tutkimuksessa kaikista eri näkökulmista.

### *11.3 Jatkotutkimusmahdollisuuksia*

Kehittämistutkimukselle tyypillisen syklisen luonteen vuoksi tätä tutkimusta voisi jatkaa loputtomiin toteuttamalla uusia kehittämissyklejä. Koska tässä tutkimuksessa jatkokehitettyä oppimateriaalin toista versiota ei tämän tutkimuksen puitteissa enää kokeiltu käytännössä, olisi sen testaaminen autenttisissa olosuhteissa luonnollinen jatkumo tälle tutkimukselle. Olisi mielenkiintoista päästä näkemään, onko oppimateriaalille tehdyistä muutoksista apua ensimmäisen version yhteydessä todettuihin ongelmakohtiin. Toisaalta tässä tutkimuksessa kehitettyä oppimateriaalia olisi mielenkiintoista päästä testaamaan monessa eri luokassa, jolloin tehtävien ja harjoitusten pätevyyydestä saataisiin luotettavampaa tietoa, kun otoskoko olisi suurempi. Vaikka vertailevat tutkimukset ovatkin usein ongelmallisia, sillä mahdollisia kontrolloimattomia tuloksiin vaikuttavia tekijöitä voi olla paljon, olisi kuitenkin mielenkiintoista tutkia oppimateriaalin tehokkuutta myös tutkimuksella, jossa toista luokkaa opetettaisiin tämän oppimateriaalin avulla ja toista luokkaa ilman tätä oppimateriaalia. Tällöin oppimisen kehitystä selvitetäisiin alku- ja loppukokeen keinoin. Vertailukohteen vuoksi tulosten arviointi olisi tähän tutkimukseen verrattuna helpompaa ja luotettavampaa.

Toinen mielenkiintoinen jatkotutkimusaihe olisi kehittää oppimateriaalia vielä siten, että kertolaskun rinnalle otettaisiin mukaan jakolasku. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan toisella vuosiluokalla kertolaskun yhteydessä tulisi luoda myös pohja kerto- ja jakolaskun yhteyden ymmärtämiselle (Opetushallitus 2014, 129). Riskun (2002, 127) mukaan jakolaskua tulisi käsitellä rinnakkain samoin kuin yhteen- ja vähennyslaskuakin. Tämän tutkimuksen puitteissa jakolaskun ottaminen mukaan ei ollut mahdollista, sillä ajallisen rajauksen vuoksi jakolaskuosuutta ei olisi pystytty testaamaan autenttisissa olosuhteissa. Oppimateriaalin sisällöllinen laajentaminen myös jakolaskuun olisi kuitenkin aiheellista ja soveltuisi hyvin tämän tutkimuksen jatkoksi.



# LÄHTEET

- Aksela, M. 2005. Supporting meaningful chemistry learning and higher-order thinking through computer-assisted inquiry: A design research approach. Helsingin yliopisto. Kemian laitos.
- Anderson, T. & Shattuck, J. 2012. Design-based research: A decade of progress in education research? *Educational Researcher* 41 (1), 16–25.
- Askew, M. 2012. Talk: The key to mathematical understanding? Teoksessa M. McAteer (toim.) *Improving primary mathematics teaching and learning*. Berkshire: McGraw-Hill Education, 152–170.
- Barab, S. 2006. Design-based research: A methodological toolkit for the learning scientist. Teoksessa R. K. Sawyer (toim.) *The Cambridge handbook of the learning sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 153–169.
- Barab, S. & Squire, K. 2004. Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences* 13 (1), 1–14.
- Bauer, M. W. 2011. Classical content analysis: a review. Teoksessa M. W. Bauer & G. Gaskell (toim.) *Qualitative researching with text, image and sound*. London: SAGE Publications Ltd, 132–151.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. 2013. A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology* 105 (2), 380–400.
- Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. 2003. *Classroom discussions: Using math talk to help students learn, grades 1–6*. CA: Math Solutions Publications.
- Clements, D. H. 1999. Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics* 5, 400–405.
- Clements, D. H. & Sarama, J. 2009. *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- De Brauwier, J., Verguts, T. & Fias, W. 2006. The representation of multiplication facts: Developmental changes in the problem size, five, and tie effects. *Journal of Experimental Child Psychology* 94 (1), 43–56.
- Dede, C. 2004. If design-based research is the answer, what is the question? A commentary on Collins, Joseph, and Bielaczyc; diSessa and Cobb; and Fishman, Marx, Blumenthal, Krajcik, and Soloway in the JLS special issue on design-based research. *Journal of the Learning Sciences* 13 (1), 105–114.
- Department for Education and Skills. 2006. *Primary national strategy: Primary framework for literacy and mathematics*. Manchester: Department for Education and Skills.

Design-Based Research Collective. 2003. Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher* 32 (1), 5–8.

Edelson, D. C. 2002. Design research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences* 11 (1), 105–121.

Eskola, J. 2015. Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin*. Jyväskylä: PS-kustannus, 185–206.

Gray, E. & Tall, D. 1994. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (2), 116–140.

Hannula, M. S. & Oksanen, S. 2013. Opettajamuuttujien yhteys osaamisen muutokseen. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012*. Helsinki: Opetushallitus, 255–296.

Hassinen, S. 2006. Idealähtöistä koulualgebraa: IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebra opetukseen peruskoulun 7. luokalla. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274.

Heikkinen, H. L. T. 2015. Toimintatutkimus: kun käytäntö ja tutkimus kohtaavat. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodien valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. Jyväskylä: PS-kustannus, 204–219.

Heikkinen, H. L. T., Kontinen, T. & Häkkinen, P. 2007. Toiminnan tutkimisen suuntaukset. Teoksessa H. L. T. Heikkinen, E. Rovio & L. Syrjälä (toim.) *Toiminnasta tietoon: Toimintatutkimuksen menetelmät ja lähestymistavat*. Helsinki: Kansanvalistusseura, 39–76.

Heinonen, J-P. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit – peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 257.

Hirvonen, K. 2012. Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011. Helsinki: Opetushallitus.

Ikäheimo, H. 1997. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H., Aalto, A. & Puumalainen, K. 2004. Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa. Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 222–240.

Joutsenlahti, J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003*. Turku: Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B: 72, 188–196.

Joutsenlahti, J. 2009. Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Rovaniemi: Lapin yliopisto. Kasvatustieteellisiä raportteja 9, 71–86.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010a. Matematiikan sekä äidinkielen ja kirjallisuuden opetuksen kehittäminen yhteisen tutkimuksen avulla: Sanan lasku -projekti. Teoksessa T. Laine & T. Tammi (toim.) Tutki, kehitä, kokeile. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja 10. Tampere: Tampereen yliopisto, 53–62.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010b. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silferberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampere: Tampereen yliopisto. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A 31, 77–89.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2015. Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa T. Kaartinen (toim.) Monilukutaito kaikki kaikessa. Tampere: Tampereen yliopiston normaalikoulu, 57–76.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2016. Akateeminen lukutaito matematiikassa. Teoksessa H. Silfverberg & P. Hästö (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät 2015. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura r.y., 23–34. [http://www.protsv.fi/mlseura/julkaisut/MALU2015\\_Final.pdf](http://www.protsv.fi/mlseura/julkaisut/MALU2015_Final.pdf). (Viitattu 15.3.2017.)

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. 2011. Matematiikan kielentämisen tutkimuksen lähtökohtia kielen näkökulmasta Sanan lasku -projektissa. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta: Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.-15.10.2010. Tampere: Tampereen yliopisto, 170–185.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. 2015. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. Ainedidaktisia tutkimuksia 8. Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, 45–61.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2007. Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.) Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet. Ainedidaktinen symposium 9.2.2007. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:77. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 184–191.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan oppimisessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Helsinki: Opetushallitus, 137–148.

Joutsenlahti, J., Kulju, P. & Tuomi, M. 2012. Matemaattisen lausekkeen kontekstualisointi sanalliseksi tehtäväksi ja tarinaksi. Opetuskokeilu kirjoittamisen hyödyntämisestä matematiikan opiskelussa. Teoksessa K. Juuti & L. Tainio (toim.) Ainedidaktinen tutkimus koulutuspoliittisen päätöksenteon perustana. Ainedidaktisia tutkimuksia 4. Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, 107–122.

Juuti, K. 2005. Towards primary school physics teaching and learning: Design research approach. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 256.

Juuti, K. & Lavonen, J. 2009. Design-based research ainedidaktisen tutkimuksen metodologisena lähestymistapana. Teoksessa R. Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Rovaniemi: Lapin yliopisto. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9, 157–180.

Kauppila, R. A. 2007. Ihmisen tapa oppia. Johdatus sosiokonstruktiiviseen oppimiskäsitykseen. Jyväskylä: PS-kustannus.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (toim.) 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press.

Kinnunen, R. 2003. Miksi kertotauluun kompastuu? Lukujen hallinta oppimisen perustana. Turku: Turun yliopisto, oppimistutkimuksen keskus.

Kiviniemi, K. 2015. Design- eli suunnittelututkimus opetus- ja kasvatusalalla. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodien valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle. Jyväskylä: PS-kustannus, 220–240.

Kupari, P. & Vettenranta, J. & Nissinen, K. 2012. Oppijälhtöistä pedagogiikkaa etsimään. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kuula, A. 2006. Yksityisyyden suoja tutkimuksessa. Teoksessa J. Hallamaa, V. Launis, S. Lötjönen & I. Sorvali (toim.) Etiikkaa ihmistieteille. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura, 124–140.

Laitinen, M. 2016. Suullinen tiedonanto 16.12.2016 Tampereella.

Laitinen, M., Rantamäki, H. & Joutsenlahti, J. 2015. Puhutko matematiikkaa? Teoksessa T. Kaartinen (toim.) Monilukutaito kaikki kaikessa. Tampere: Tampereen yliopiston normaalikoulu, 132–154.

Lampinen, A., Neményi, E. C. & Oravecz, M. Sz. 2011. Opettajan tienviitta 2a. Varga–Neményi-yhdistys ry.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. & Murray, A. K. 2015. What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. SAGE Open 5 (2), 1–8.

Lemaire, P. & Siegler, R. S. 1995. Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. Journal of Experimental Psychology 124 (1), 83–97.

Lemke, J. 2002. Mathematics in the Middle: Measure, Picture, Gesture, Sign, and Word. Teoksessa M. Anderson, A. Saenz-Ludlow, S. Zellweger & V. Cifarelli (toim.). Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing. Ottawa: Legas Publishing, 215–234.

- Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittäminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 298.
- Mabbot, D. J. & Bisanz, J. 2003. Developmental change and individual differences in children's multiplication. *Child Development* 74 (4), 1091–1107.
- Magdas, I. 2012. An investigation of students' difficulties to create a blackboard sketch for the lesson: Table of multiplication by two. *Acta Didactica Napocensia* 5 (3), 13–22.
- Metsämuuronen, J. 2008. Laadullisen tutkimuksen perusteet. Helsinki: International Methelp.
- Metsämuuronen, J. 2013a. Matemaattisen osaamisen muutos perusopetuksen vuosiluokilla 3–9. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Helsinki: Opetushallitus, 65–171.
- Metsämuuronen, J. (toim.) 2013b. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportti 2013:4. Helsinki: Opetushallitus.
- Morgan, C. 2001. The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa P. Gates (toim.) *Issues in mathematics teaching*. London: RoutledgeFalmer, 232–244.
- Opetushallitus. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.
- Opetushallitus. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus.
- Park, J-H. & Nunes, T. 2001. The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development* 16, 763–773.
- Pehkonen, E. & Krzywacki-Vainio, H. 2007. Mathematics teaching in primary schools. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) *How Finns learn mathematics and science*. Rotterdam: Sense Publishers, 155–164.
- Pehkonen, E. & Rossi, M. 2007. Some alternative teaching methods in mathematics. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) *How Finns learn mathematics and science*. Rotterdam: Sense Publishers, 141–154.
- Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 195.
- Perkkilä, P. & Lehtelä, P-L. 2007. Learning environments in mathematics and science. Teoksessa E. Pehkonen, M. Ahtee & J. Lavonen (toim.) *How Finns learn mathematics and science*. Rotterdam: Sense Publishers, 69–85.
- Pernaa, J. 2013. Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.) *Kehittämistutkimus opetuslalla*. Jyväskylä: PS-Kustannus, 9–26.
- Piaget, J. & Inhelder, B. 1977. Lapsen psykologia. Suom. M. Rutanen. Jyväskylä: Gummerus

- Rautopuro, J. 2013. Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012. Helsinki: Opetushallitus.
- Reed, H. C., Stevenson, C., Broens-Paffen, M., Kirschner, P. A. & Jolles, J. 2015. Third graders' verbal reports of multiplication strategy use: How valid are they? *Learning and Individual Differences* 37, 107–117.
- Risku, A-M. 2002. Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (toim.) *Ensimmäiset kouluvuodet: Perusopetuksen vuosiluokkien 1–2 opetus*. Helsinki: Opetushallitus, 115–141.
- Saarikoski, S. 2016. Taidot laskussa. *Helsingin Sanomat* 29.5.2016, Sunnuntai C1–5.
- Salo, U-M. 2015. Simsalabim, sisällönanalyysi ja koodaamisen haasteet. Teoksessa S. Aaltonen & R. Högbäck (toim.) *Umpikujasta oivallukseen. Refleksiivisyys empiirisessä tutkimuksessa*. Tampere: Tampere University Press, 166–190.
- Schreier, M. 2013. Qualitative content analysis. Teoksessa U. Flick (toim.) *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis*. London: SAGE Publications Ltd, 170–183.
- Schleppegrell, M. 2010. Language in mathematics teaching and learning: a research review. Teoksessa J. N. Moschkovich (toim.) *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 73–112.
- Smith, S. Z. & Smith, M. E. 2006. Assessing elementary understanding of multiplication concepts. *School Science and Mathematics* 106 (3), 140–149.
- Steel, S. & Funnell, E. 2001. Learning multiplication facts: A study of children taught by discovery methods in England. *Journal of Experimental Child Psychology* 79 (1), 37–55.
- Strandell, H. 2010. Etnografinen kenttätö: lasten kohtaamisen eettisiä ulottuvuuksia. Teoksessa H. Lagström, T. Pösö, N. Rutanen & K. Vehkalahti (toim.) *Lasten ja nuorten tutkimuksen etiikka*. Helsinki: Nuorisotutkimusseura, 92–112.
- Tuomi, J. & Sarajarvi, A. 2009. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi.
- Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.
- Valli, R. 2015. Paperinen kyselylomake. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodien valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle*. Jyväskylä: PS-kustannus, 84–108.
- Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E. & Rautopuro, J. 2016. Lapsuudesta eväät oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K., Lähteinen, S., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Rautopuro, J. & Vainikainen, M-P. 2016. PISA15 ensituloksia. Huipulla pudotuksesta huolimatta. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2016:41. <https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/79052/okm41.pdf?sequence=1>. (Viitattu 30.1.2017.)

Watanabe, T. 2003. Teaching multiplication: An analysis of elementary school mathematics teachers' manuals from Japan and the United States. *The Elementary School Journal* 104 (2), 111–125.

Vygotski, L. S. 1982. Ajattelu ja kieli. Suom. K. Helkama & A. Koski-Jännes. Espoo: Weilin+Göös.

## **Oppikirjalähteet**

Aartolahti-Tikkanen, S., Laitinen, M., & Lindberg, J. 2009. Numero 2, kevät. Helsinki: Tammi.

Asikainen, K., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. 2007. Tuhattaituri 2a. Helsinki: Otava.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. 2016. Tuhattaituri 2a. Helsinki: Otava.

Lilli, M., Putkonen, H., Sinnemäki, J. & Mikkonen, V. 2010. Uusi matikkamatka 2, kevät: Opettajan opas. Helsinki: Tammi.

Okkonen-Sotka, P., Sintonen, A., & Uus-Leponiemi, T. 2009. Matikka 2, syksy. Helsinki: WSOYpro Oy.

Putkonen, H., Sinnemäki, J., Arhoma, H., Tikka, M., Mikkonen, V. & Lilli, M. 2010. Uusi matikkamatka 2, kevät. Helsinki: Tammi.

Uus-Leponiemi, M., Uus-Leponiemi, T., Sintonen, A-M. & Rinne, S. 2016. Kymppi 2, syksy. Helsinki: Sanoma Pro.

# LIITTEET

- Liite 1 Oppilaiden kyselylomake koko jaksosta
- Liite 2 Oppilaiden viikoittaiset kyselylomakkeet
- Liite 3 Oppimateriaalin esittely ja ohjeistus sen käyttöön
- Liite 4 Oppimateriaali: Kertolaskun käsitteeseen liittyvät tehtävät
- Liite 5 Oppimateriaali: Kertotauluihin liittyvät tehtävät
- Liite 6 Oppimateriaali: Vaihdannaisuuteen ja yhdistettyihin laskutoimituksiin liittyvät tehtävät
- Liite 7 Oppimateriaali: Kertaustehtävät ja koe



1. Matematiikka on kivaa.



2. Olen hyvä matematiikassa.



3. Kertolaskujen laskeminen on kivaa.



4. Kertolaskujen laskeminen on helppoa.



5. Olen hyvä laskemaan kertolaskuja.



6. Lukupalat auttavat minua ymmärtämään, miten kertolaskuja lasketaan.



7. Kuvat auttavat minua kertolaskujen laskemisessa.



8. Minua auttaa ymmärtämään se, kun luokkakaverini selittää omin sanoin, miten hän ratkaisi tehtävän



Minun mielestäni kolme tärkeintä asiaa, jotka opin, olivat:

---



---

Minun mielestäni helpoin asia oli:

---



---

Minun mielestäni vaikein asia oli:

---



---

Minun mielestäni mukavin harjoitus/tehtävä oli:

---



---

Miksi juuri se oli mukavin?

---



---

Minun mielestäni ikävin harjoitus/tehtävä oli:

---



---

Miksi juuri se oli ikävin?

---



---

Muuta palautetta? Mikä oli hyvää? Mikä oli huonoa?

---



---



---



---



---



---

1. Mikä oli tärkein asia, jonka opit viikon aikana?

---



---

2. Mikä oli vaikeinta?

---



---



---

3. Mikä oli helpointa?

---



---



---

4. Mikä seuraavista tehtävistä oli **kivoin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- ☐ Omenatehtävä 

---
- ☐ Lukupaloilla laskeminen 

---
- ☐ Parityöskentely laskukorteilla 

---
- ☐ Korttimoniste 

---
- ☐ Muut monisteet ja kirjan tehtävät 

---

5. Mikä seuraavista tehtävistä oli **ikävin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- ☐ Omenatehtävä 

---
- ☐ Lukupaloilla laskeminen 

---
- ☐ Parityöskentely laskukorteilla 

---
- ☐ Korttimoniste 

---
- ☐ Muut monisteet ja kirjan tehtävät 

---

1. Mikä oli tärkein asia, jonka opit viikon aikana?

---



---

2. Mikä oli vaikeinta?

---



---



---

3. Mikä oli helpointa?

---



---



---

4. Mikä seuraavista tehtävistä oli **kivoin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- ☐ Kymppikorteilla laskeminen pareittain 

---
- ☐ Oman tehtävän keksiminen kertolaskusta 

---
- ☐ Kuvan piirtäminen kertolaskusta 

---
- ☐ Muut monisteet 

---
- ☐ Kirjan tehtävät 

---

5. Mikä seuraavista tehtävistä oli **ikävin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- ☐ Kymppikorteilla laskeminen pareittain 

---
- ☐ Oman tehtävän keksiminen kertolaskusta 

---
- ☐ Kuvan piirtäminen kertolaskusta 

---
- ☐ Muut monisteet 

---
- ☐ Kirjan tehtävät 

---

1. Mikä oli tärkein asia, jonka opit viikon aikana?

---



---

2. Mikä oli vaikeinta?

---



---



---

3. Mikä oli helpointa?

---



---



---

4. Mikä seuraavista tehtävistä oli **kivoin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- |  |       |
|--|-------|
| <input type="checkbox"/> Oman tehtävän keksiminen kertolaskusta  | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Lukupaloilla laskeminen                 | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Mikä luku puuttuu -tehtävä parin kanssa | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Multiplikare                            | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Kirjan tehtävät ja monisteet            | <hr/> |

5. Mikä seuraavista tehtävistä oli **ikävin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- |  |       |
|--|-------|
| <input type="checkbox"/> Oman tehtävän keksiminen kertolaskusta  | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Lukupaloilla laskeminen                 | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Mikä luku puuttuu -tehtävä parin kanssa | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Multiplikare                            | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Kirjan tehtävät ja monisteet            | <hr/> |

1. Mikä oli tärkein asia, jonka opit viikon aikana?

---



---

2. Mikä oli vaikeinta?

---



---



---

3. Mikä oli helpointa?

---



---



---

4. Mikä seuraavista tehtävistä oli **kivoin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- |  |       |
|--|-------|
| <input type="checkbox"/> Mikä luku puuttuu -tehtävä parin kanssa | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Multiplikare                            | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Kertotaulutikapuut                      | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Kirjan tehtävät                         | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Monisteet                               | <hr/> |

5. Mikä seuraavista tehtävistä oli **ikävin**? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.

- |  |       |
|--|-------|
| <input type="checkbox"/> Mikä luku puuttuu -tehtävä parin kanssa | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Multiplikare                            | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Kertotaulutikapuut                      | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Kirjan tehtävät                         | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Monisteet                               | <hr/> |

**1. Mikä oli tärkein asia, jonka opit viikon aikana?**

---



---

**2. Mikä oli vaikeinta?**

---



---



---

**3. Mikä oli helpointa?**

---



---



---

**4. Mikä seuraavista tehtävistä oli **kivo**in? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.**

- |  |       |
|--|-------|
| <input type="checkbox"/> Mikä luku puuttuu -tehtävä parin kanssa | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Multiplikare                            | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Muistipeli                              | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Lukupaloilla laskeminen                 | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Monisteet                               | <hr/> |

**5. Mikä seuraavista tehtävistä oli **ikä**vin? Merkitse rastilla ja kirjoita viivoille, miksi valitsit juuri sen tehtävän.**

- |  |       |
|--|-------|
| <input type="checkbox"/> Mikä luku puuttuu -tehtävä parin kanssa | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Multiplikare                            | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Muistipeli                              | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Lukupaloilla laskeminen                 | <hr/> |
| <input type="checkbox"/> Monisteet                               | <hr/> |

**Oppimateriaalin esittely ja käytön ohjeistus**

Tämä oppimateriaali on tarkoitettu toiselle vuosiluokalle kertolaskun käsitteen sekä kertotaulujen 1–5 ja 10 opetukseen. Oppimateriaali hyödyntää erityisesti toimintamateriaalien, kuvioden ja luonnollisen kielen käyttöä matematiikan symbolikielen rinnalla oppimisen tukena. Erityisenä piirteenä materiaalissa on toimintamateriaalina käytetyt Solmu-ohjelman lukumääräpalat. Oppimateriaali koostuu erilaisista suoraan oppilaiden tehtäväksi tarkoitetuista tehtävämoneisteista sekä ohjeista ja materiaaleista erilaisiin toiminnallisiin harjoituksiin. Ideana on, että tätä oppimateriaalia voidaan käyttää minkä tahansa oppikirjan rinnalla, joten tämä oppimateriaali ei erityisemmin keskity mekaanisiin laskutehtäviin, vaan pyrkii tarjoamaan monipuolisia tehtäviä ja harjoituksia oppikirjan rinnalle opetuksen monipuolistamiseksi.

Oppimateriaalin tehtävät ja harjoitukset on jaettu neljään eri kategoriaan sen perusteella, mitä niillä on tarkoitus harjoitella. Ensimmäisen kategorian tehtävät (liite 4) liittyvät kertolaskun käsitteeseen, toisen kategorian tehtävät (liite 5) liittyvät eri kertotauluihin ja kolmannen kategorian tehtävissä (liite 6) harjoitellaan vaihdannaisuutta ja yhdistettyjä laskutoimituksia. Neljäntenä kategoriana (liite 7) on kertaustehtävät ja koe.

Seuraavalla sivulla on malliksi esitetty esimerkki siitä, miten kertolaskujakso voidaan rakentaa tätä oppimateriaalia käyttäen. Tässä tutkimuksessa toteutettu opetuskokeilu toteutettiin tämän mallin mukaisesti. Tosin osa tehtävistä oli vielä alkuperäisessä muodossaan. Tässä esimerkissä opetusjakso on kuuden viikon mittainen ja jokaisen viikon kohdalla on mainittu, mitä asioita viikon aikana on tarkoitus opetella. Tehtävät ja harjoitukset on lueteltu siinä järjestyksessä, missä ne on tarkoitus tehdä. Tehtävän tai harjoituksen perässä on vielä lisäksi liite, jossa kyseinen tehtävä tai harjoitus on esitetty.

Esimerkkimallin jälkeen on vielä esitetty oppimateriaalin sisältö kokonaisuudessaan jaoteltuna neljään eri kategoriaan. Tässä sisältöluettelossa harjoitukset ja tehtävät on lueteltu siinä järjestyksessä, miten ne on esitetty liitteissä.

**Malliesimerkki oppimateriaalin käytöstä**

## VIIKKO 1 (kertolaskun käsite)

Omenaharjoitus: yhtä suurten lukujen yhteenlaskusta kertolaskuun (liite 4(1))  
 Omenamoniste: kertolaskun käsite (liite 4(2–3))  
 Lukumääräpalaharjoitus kertolaskun käsitteestä (liite 4(4))  
 Lukumääräpalamoniste (liite 4(5–6))  
 Korttiharjoitus: yhteenlasku – kertolasku – kuvio (liite 4(7–13))  
 Moniste: valitse yhteenlasku, piirrä kuva (liite 4(14))  
 Sanalliset tehtävät: kertolaskun käsite (liite 4(15))  
 Laskutarina: sanallisen tehtävän keksiminen (liite 4(16))

## VIIKKO 2 (10:n ja 5:n kertotaulut)

Kymppikorttiharjoitus (liite 5(1–2))  
 Kymppikorttimoniste (liite 5(3–4))  
 Sanalliset tehtävät ja laskutarina: 10:n kertotaulu (liite 5(5))  
 Käsiharjoitus 5:n kertotaulusta (liite 5(6))  
 Käsimoniste 5:n kertotaulusta (liite 5(7))  
 Lukujonokorttiharjoitus: kertotaulut, opettajaohjoinen harjoitus (liite 5(16))

## VIIKKO 3 (5:n ja 2:n kertotaulut, vaihdannaisuus)

Sanalliset tehtävät: 5:n kertotaulu (liite 5(8))  
 Lukumääräpalaharjoitus: kertotaulut (liite 5(13))  
 Multiplikare (liite 5(14))  
 Lukujonokorttiharjoitus (liite 5(16–18))  
 Kertotaulut sekaisin -moniste A (liite 5(23))  
 Lukumääräpalaharjoitus: vaihdannaisuus (liite 6(1))  
 Vaihdannaisuusmoniste (liite 6(2–3))

## VIIKKO 4 (4:n kertotaulu, luvut 1 ja 0 kertolaskussa)

Lukumääräpalaharjoitus: kertotaulut (liite 5(13))  
 Multiplikare (liite 5(14–15))  
 Lukujonokorttiharjoitus (liite 5(16, 19–20))  
 Kertotaulutikapuut (liite 5(22))  
 4:n kertotaulun moniste (liite 5(11–12))  
 Kertotaulut sekaisin -moniste B (liite 5(23))  
 Omenaharjoitus: 0 ja 1 kertolaskussa (liite 4(1))

## VIIKKO 5 (3:n kertotaulu, yhdistetyt laskutoimitukset)

Lukumääräpalaharjoitus: kertotaulut (liite 5(13))  
 Multiplikare (liite 5(14–15))  
 Lukujonokorttiharjoitus (liite 5(16–18))  
 Kertotaulutikapuut (liite 5(21))  
 3:n kertotaulun moniste (liite 5(9–10))  
 Lukujonokorttiharjoitus: muistipeli (liite 5(16–18))  
 Kertotaulut sekaisin -moniste C (liite 5(23))  
 Omenaharjoitus: yhdistetyt laskutoimitukset (liite 6(4))  
 Omenamoniste: yhdistetyt laskutoimitukset (liite 6(5–6))

## VIIKKO 6 (yhdistetyt laskutoimitukset, kertausta ja koe)

Sanalliset tehtävät ja laskutarina: yhdistetyt laskutoimitukset (liite 6(7–8))  
 Kertotaulut sekaisin -moniste D (liite 5(23))  
 Kertausmoniste (liite 7(1–2))  
 Koe (liite 7(3–4))

**Oppimateriaalin sisältö**Kertolaskun käsitteeseen liittyvät tehtävät (liite 4)

Omenaharjoitus: yhtä suurten lukujen yhteenlaskusta kertolaskuun sekä 0 ja 1 kertolaskussa  
 Omenamoniste: kertolaskun käsite  
 Lukumääräpalaharjoitus kertolaskun käsitteestä  
 Lukumääräpalamoniste  
 Korttiharjoitus: yhteenlasku – kertolasku – kuvio  
 Moniste: kertolasku – yhteenlasku – kuvio  
 Moniste: valitse yhteenlasku, piirrä kuva  
 Sanalliset tehtävät: kertolaskun käsite  
 Laskutarina: sanallisen tehtävän keksiminen

Kertotauluihin liittyvät tehtävät (liite 5)

Kymppikorttiharjoitus  
 Kymppikorttimoniste  
 Sanalliset tehtävät ja laskutarina: 10:n kertotaulu  
 Käsiharjoitus 5:n kertotaulusta  
 Käsimoniste 5:n kertotaulusta  
 Sanalliset tehtävät: 5:n kertotaulu  
 3:n kertotaulun moniste  
 4:n kertotaulun moniste

*Useaan kertotauluun sovellettavissa olevat harjoitukset:*

Lukumääräpalaharjoitus: kertotaulut  
 Multiplikare  
 Lukujonokorttiharjoitus ja muistipeli  
 Kertotaulutikapuut  
 Kertotaulut sekaisin -moniste

Vaihdannaisuuteen ja yhdistettyihin laskutoimituksiin liittyvät tehtävät (liite 6)

Lukumääräpalaharjoitus: vaihdannaisuus  
 Vaihdannaisuusmoniste  
 Omenaharjoitus: yhdistetyt laskutoimitukset  
 Omenamoniste: yhdistetyt laskutoimitukset  
 Sanalliset tehtävät ja laskutarina: yhdistetyt laskutoimitukset

Kertaustehtävät ja koe (liite 7)

Kertaustehtävämoniste  
 Jakson loppukoe

# Omenaharjoitus: Yhtä suurten lukujen yhteenlaskusta kertolaskuun

Välineet: Omenakortteja magneetilla

Opettaja kertoo päättäneensä leipoa omenapiirakkaa. Yhteen piirakkaan tarvitaan 2 omenaa. Opettaja pyytää oppilasta hakemaan hänelle korista kaksi omenaa (kuvakorttia), jotka kiinnitetään taululle. Opettaja päättää leipoa toisenkin piirakan, ja pyytää samaa oppilasta hakemaan vielä toisen kerran 2 omenaa, jotka kiinnitetään taululle. Opettaja päättää leipoa vielä kolmannenkin piirakan ja pyytää jälleen samaa oppilasta hakemaan kolmannen kerran 2 omenaa, jotka kiinnitetään taululle.

*Pohditaan yhdessä, minkä yhteenlaskun taululla olevasta kuviosta ja äskeisestä toiminnasta voisi tehdä. Kirjoitetaan se taululle.*

*Pohditaan, kuinka monta kertaa oppilas kävi hakemassa omenoita ja kuinka monta omenaa oppilas toi ensimmäisellä, toisella ja kolmannella kerralla. Kirjoitetaan taululle samalla 3 kertaa 2 on yhtä suuri kuin 6.*

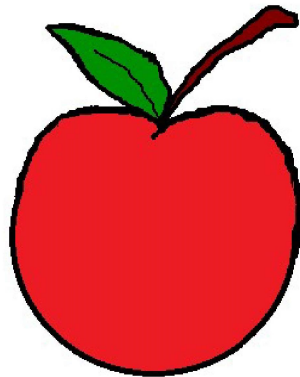
Toistetaan sama monta kertaa eri luvuilla. Lopulta otetaan käyttöön vielä luonnollista kieltä hyödyntävän esityksen rinnalle matematiikan symbolikieli eli opetellaan kertomerkki.

Harjoitusta voidaan jatkaa pidemmälle myös niin, että opettaja kirjoittaa taululle kertolaskun ja oppilaan täytyy käydä hakemassa korista omenoita sen mukaisesti.

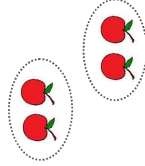
Harjoitus on kertolaskujakson aikana myöhemmin hyvä myös sen havainnollistamiseen, mikä merkitys nolllalla on kertolaskussa. Kun opettaja pyytää oppilasta hakemaan korista 0 kertaa 3 omenaa, havainnollistuu hyvin se, että omenoita ei haeta yhtään kertaa, joten vastaus on nolla. Toisaalta kun opettaja pyytää oppilasta hakemaan korista 3 kertaa 0 omenaa, havainnollistuu hyvin se, että korilla käydään kolme kertaa, mutta sieltä ei tuoda mitään, joten vastaus on 0.

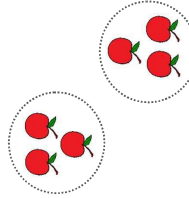
Myös 1:n kertotaulu havainnollistuu samalla tavalla.

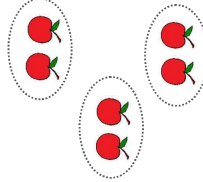
*Harjoituksen idea on alun perin esitetty teoksessa Opettajan tienviitta 2a (Lampinen, Neményi & Oravec 2011, 100).*



1. Muodosta kuvasta yhteenlasku sekä kertolasku ja laske.

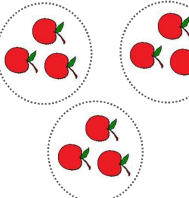


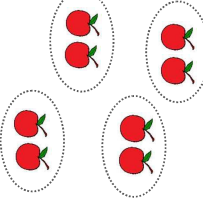
$$\begin{array}{r} \_ + \_ = \_ \\ \text{ kertaa } \_ \text{ on yhtä suuri kuin } \_ \end{array}$$


$$\begin{array}{r} \_ + \_ = \_ \\ \text{ kertaa } \_ \text{ on yhtä suuri kuin } \_ \end{array}$$


$$\begin{array}{r} \_ + \_ + \_ = \_ \\ \text{ kertaa } \_ \text{ on yhtä suuri kuin } \_ \end{array}$$

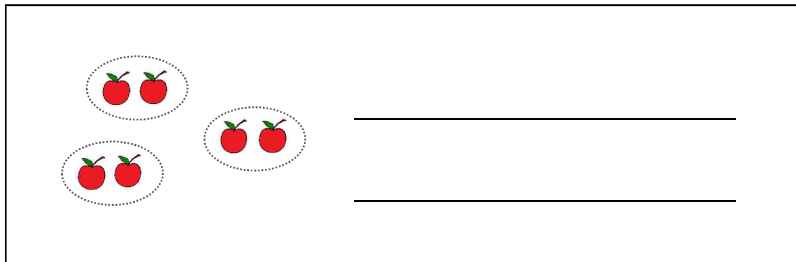
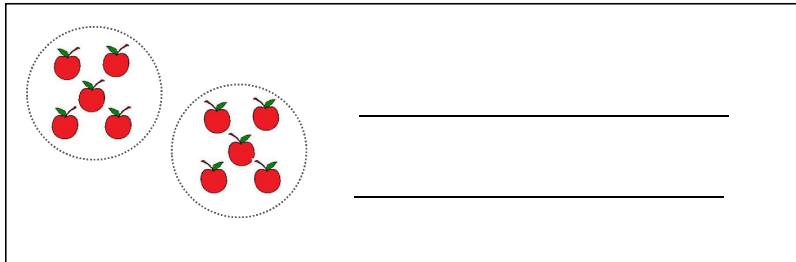
Piirrä kuva laskusta **2 kertaa 4**. Kirjoita lasku viivalle ja laske se.

$$\_$$


$$\begin{array}{r} \_ + \_ + \_ = \_ \\ \text{ kertaa } \_ \text{ on yhtä suuri kuin } \_ \end{array}$$


$$\begin{array}{r} \_ + \_ + \_ + \_ = \_ \\ \text{ kertaa } \_ \text{ on yhtä suuri kuin } \_ \end{array}$$

2. Muodosta kuvasta yhteenlasku sekä kertolasku ja laske ne.



3. Piirrä kuva laskusta 4 kertaa 2. Kirjoita lasku viivalle ja laske se.



Lukumääräpalaharjoitus kertolaskun käsitteestä

Välineet: Lukumääräpalat, kymppipohjat

Tämä harjoitus on tarkoitettu tehtäväksi pienessä ryhmässä opettajan johdolla. Lukumääräpalat ovat jaoteltuina eri laatikoihin siten, että samanlaiset palat ovat samassa laatikossa. Laatiko on asetettu keskelle siten, että palat ovat oppilaiden saatavilla. Jokaisella oppilaalla on oma kymppikehyks (ohessa kaksi eriväristä kymppikehystä, joista kymmenen raja erottuu selvästi).

Harjoitus 1

Opettaja antaa oppilaille ohjeeksi ottaa laatikoista yhden kerran kaksi ja asettaa palat omaan kymppikehykseen. Seuraavaksi otetaan laatikoista toisen kerran kaksi ja asetetaan se kymppikehykseen ja sen jälkeen laatikoista otetaan vielä kolmannen kerran kaksi.

*Pohditaan yhdessä, kuinka monta kertaa jokainen oppilas otti laatikoista kaksi.*

*Pohditaan, mikä kertolasku toiminnasta voidaan muodostaa ja mietitään, miksi toiminnasta voidaan muodostaa juuri kyseinen lasku.*

Opettaja kirjoittaa laskun matematiikan symbolikielellä kaikkien nähtäville. Ratkaistaan laskun tulos tutkimalla kymppikehyksiin asetettuja lukumääräpaloja (kymppikehyksen avulla vastaus voidaan nähdä selvästi).

*Pohditaan myös, miten kertolasku voidaan ratkaista yhteenlaskun avulla.*

Laitetaan palat takaisin laatikkoon ja toistetaan sama pariin kertaan eri luvuilla.

Harjoitus 2

Opettaja sanoo ja kirjoittaa myös näkyviin oppilaille kertolaskun ja pyytää heitä ottamaan laatikosta lukumääräpaloja sen mukaisesti. Oppilaat asettavat palat omaan kymppikehykseensä.

*Pohditaan yhdessä, miksi laatikoista otettiin juuri kyseisiä paloja ja miksi niitä otettiin juuri noin monta. Pohditaan esimerkiksi laskun  $4 \cdot 2$  kohdalla, miksi otettiin juuri neljä kakkospalaa eikä kahta nelospalaa.*

Ratkaistaan laskun tulos tarkastelemalla kymppikehyksiin asetettuja lukumääräpaloja. *Pohditaan myös, miten kertolasku voidaan ratkaista yhteenlaskun avulla.*

Lopuksi laitetaan palat takaisin laatikkoon ja toistetaan sama pariin kertaan eri luvuilla.





**Korttiharjoitus: yhteenlasku – kertolasku – kuvio**

Harjoitus 1

Oppilaat työskentelevät pareittain. Jokaiselle parilla annetaan kertolaskukortit (tulostetaan vihreäksi), yhteenlaskukortit (tulostetaan siniseksi) sekä kaksipuoliset kuvakortit, joiden toisella puolella on kuva ja toisella puolella lukumääräpalakuvio. Harjoituksen tarkoituksena on yhdistää yhteenlasku, kertolasku ja oikea kuvio.

Oppilaille annettavat ohjeet:

**VALMISTELUT:**

1. Laittakaa vihreät kertolaskukortit yhteen pinoon lasku alaspäin.
2. Levittäkää siniset yhteenlaskukortit pulpetille lasku ylöspäin.
3. Levittäkää valkoiset kuvakortit pulpetille. Saatte itse valita, käytättekö lukumääräpalakuvioita vai tavallisia kuvia.

**OHJE LASKIJALLE:**

Käännä vihreästä korttipinosta yksi kertolaskukortti. Etsi pulpetilla olevista korteista sitä kertolaskua kuvaava sininen yhteenlaskukortti sekä sitä kertolaskua esittävä kuvakortti. Laita kaikki kolme korttia pulpetille vierekkäin. Selitä parillesi, miksi juuri ne kortit ovat oikeat. Kerro parillesi myös laskun vastaus.

**OHJE TARKISTAJALLE:**

Tarkista, valitseeko parisi oikean yhteenlaskukortin ja kuvakortin. Tarkista myös, laskeeko hän kertolaskun oikein.

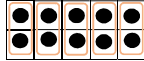
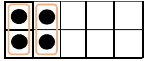
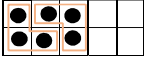
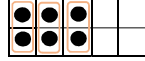
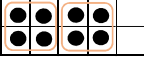
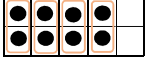
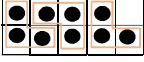
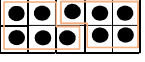
Kun molemmat ovat samaa mieltä korteista ja kertolasku on laskettu, vuorot vaihtuvat.

Harjoitus 2

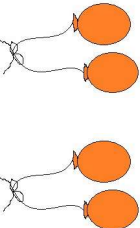
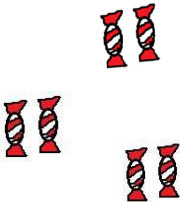
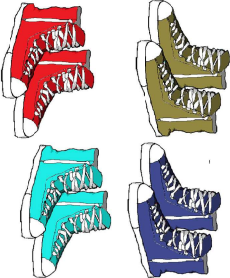
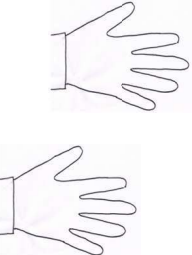

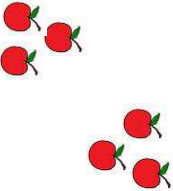
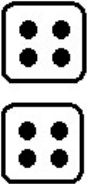
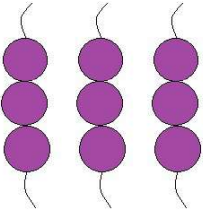
Samoja kortteja voidaan käyttää myös itsenäisesti tehtävien monisteiden yhteydessä (liite 4(12–13)). Kortit laitetaan sekaisin pussiin, joka asetetaan luokkaan oppilaiden saataville.

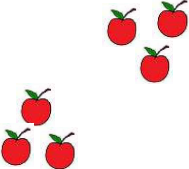
Monisteissa on annettu valmiina joko yhteenlasku, kertolasku tai kuvio ja oppilaan tehtävänä on täydentää puuttuvat kohdat annetun yhteenlaskun, kertolaskun tai kuvion mukaisesti. Kokonaan tyhjien rivien kohdalla tarkoituksena on, että oppilaat käyvät hakemassa siihen luokassa olevasta pussista kortin. Kortti asetetaan oikeaan kohtaan sen mukaan, onko se yhteenlasku, kertolasku vai kuvio. Oppilaan tehtävänä on täydentää muut kohdat. Lopuksi hän vie kortin takaisin pussiin ja täydentää sen tilalle saman laskun tai kuvion.

Lisätehtävänä voi käyttää kokonaan tyhjää ruudukkoa, johon täytyy aina hakea pussista kortti.

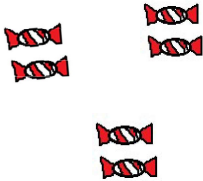
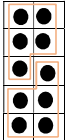
2 · 2	3 · 2	4 · 2	2 · 3
5 · 2	3 · 3	2 · 5	2 · 4

KERTOLASKU	YHTEENLASKU	KUVA
		
$2 \cdot 2$		
	$3 + 3 + 3$	

Liite 4(11)

$2 + 2$	$2 + 2 + 2$	$2 + 2 + 2 + 2$	$5 + 5$
$3 + 3$	$4 + 4$	$3 + 3 + 3$	

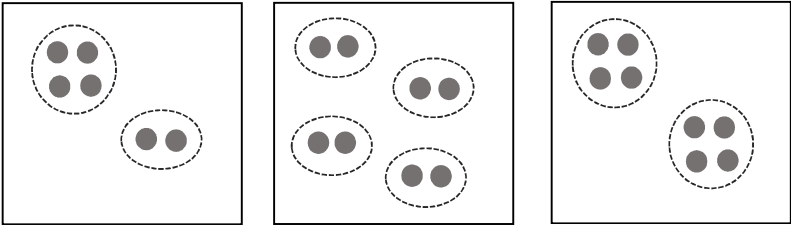
KERTOLASKU	YHTEENLASKU	KUVA
	$4 + 4$	
		
		

1. Ympyröi keskimmäisestä ruudusta se yhteenlasku, joka tarkoittaa samaa kuin viereinen kertolasku. Piirrä laskusta kuva tyhjään ruutuun.

$2 \cdot 3$	$3 + 3$ $2 + 3$ $2 + 2 + 2$	
$4 \cdot 2$	$2 + 4$ $2 + 2 + 2 + 2$ $4 + 2$	
$2 \cdot 5$	$5 + 2$ $2 + 5$ $5 + 5$	

4 · 2

1. Ympyröi seuraavista kuvioista se, joka kuvaa yllä olevaa kertolaskua.



2. Etsi ja kirjoita yllä olevasta kertolaskusta sanallinen tehtävä.

KERTOLASKU		YHTEENLASKU	KUVA
Petellä on kotona kaksi akvaarioa. Molemmissa akvaarioissa on neljä kalaa. Kuinka monta kalaa Petellä on yhteensä?			
Miralla on kolme karkkipussia. Jokaisessa karkkipussissa on viisi karkkia. Kuinka monta karkkia Miralla on yhteensä?			
Matti saa lahjaksi kaksi pakettia jalkapallokortteja. Jokaisessa paketissa on kuusi korttia. Kuinka monta korttia Matti saa yhteensä?			



Kirjoita kuvioista yhteenlasku ja kertolasku. Laske laskut.

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

**Liite 5(4)**

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

Kirjoita kuvioista yhteenlasku ja kertolasku. Laske laskut.

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

**Liite 5(3)**

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	
<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>	

YHTEENLASKU:

KERTOLASKU:

Käsiharjoitus viiden kertotaulusta

Tämä harjoitus toteutetaan yhteisenä opetustuokiona koko luokan kesken.

Opettaja kysyy ensin oppilailta, mitä heillä on viisi (sormia). Sen jälkeen opettaja pyytää oppilaita laittamaan yhden käden pulpetille. Samalla opettaja asettaa taululle yhden käsikuvan.

*Pohditaan yhdessä, mikä kertolasku tästä voidaan muodostaa. Kuinka monta kertaa oppilailla on pulpetilla viisi sormea?*

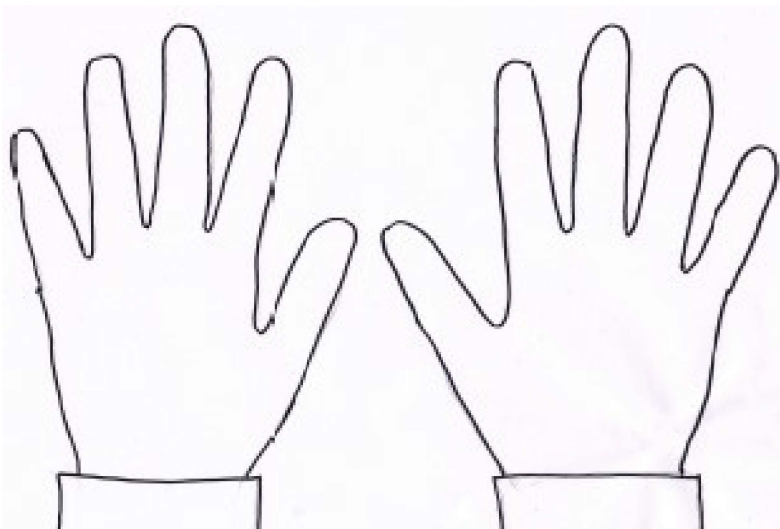
Opettaja kirjoittaa laskun taululle ja se lasketaan yhdessä.

Sen jälkeen opettaja pyytää oppilaita asettamaan toisenkin käden pulpetille. Samalla opettaja lisää taululle yhden käsikuvan.

*Pohditaan yhdessä, mikä kertolasku tästä nyt voidaan muodostaa. Montako kättä pulpetilla on ja montako sormea yhdessä kädessä on? Kuinka monta kertaa oppilailla siis on pulpetilla viisi sormea?*

Opettaja kirjoittaa jälleen laskun taululle ja se lasketaan yhdessä.

Loppu viiden kertotaulu käydään yhteisesti läpi taululla käsikuvien avulla.



1. Piirrä sanallisesta tehtävästä kuvio, muodosta kertolasku ja laske.

1. Minnalla on 4 karkkipussia.  
Jokaisessa pussissa on 10  
karkkia. Kuinka monta karkkia  
Minnalla on yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

2. Koulun pihalla on 6 omenapuita.  
Jokaiseen puuhun on kasvanut  
10 omenaa. Kuinka monta omenaa  
puissa on yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

3. Reetta ja hänen neljä kaveriaan  
menevät elokuviin. Yksi  
elokuva lippu maksaa 10 euroa.  
Kuinka paljon heiltä kuluu rahaa  
yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_









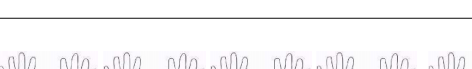
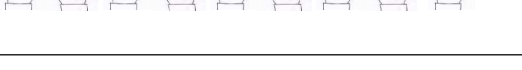
2. Piirrä yksinkertainen kuvio yllä olevasta laskusta.

3 · 10

3. Keksi ja kirjoita yllä olevasta kertolaskusta sanallinen tehtävä.



1. Kuinka monta sormea? Käytä kuvaa apuna ja täydennä laskut.

	$\underline{\quad 1 \quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$
	$\underline{\quad} \cdot 5 = \underline{\quad}$

1. Piirrä sanallisesta tehtävästä kuvio, muodosta kertolasku ja laske.

1. Julia ostaa kaupasta 4 T-paitaa. Jokainen paita maksaa 5€. Kuinka monta euroa Julian ostamat paidat maksavat yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

2. Rasmus osallistui viikonloppuna jalkapalloturnaukseen. Hänen joukkueellaan oli turnauksessa 9 peliä. Joukkue teki jokaisessa pelissä 5 maalia. Kuinka monta maalia Rasmusen joukkue teki yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

3. Junassa on 8 vaunua. Jokaisessa vaunussa on 5 matkustajaa. Kuinka monta matkustajaa junassa on yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

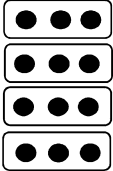
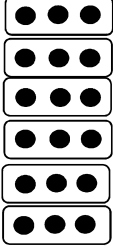
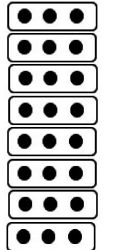
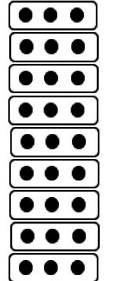
4. Äiti leipoo juhliin 5 täytekkua. Hän laittaa jokaisen kakun päälle koristeeksi 5 mansikkaa. Kuinka monta mansikkaa hän tarvitsee kakkuihin?

Vastaus: \_\_\_\_\_

5. Emma on innostunut juoksemisesta. Hän juoksee viikon jokaisena päivänä 5 kilometriä. Kuinka monta kilometriä hän juoksee viikon aikana yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

1. Käytä kuviota apuna ja täydennä lasku.

 $\_\_\_\cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	 $\_\_\_\cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$
 $\_\_\_\cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	 $\_\_\_\cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$

2. Laske. Ympyröi, kumpi laatikon laskuista oli helpompi laskea.

$3 \cdot 4 = \_\_\_\_\_\_$ $4 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$3 \cdot 5 = \_\_\_\_\_\_$ $5 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$10 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$ $3 \cdot 10 = \_\_\_\_\_\_$
--	--	--

3. Laske.

$2 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$5 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$7 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$
$6 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$3 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$4 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$
$10 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$9 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$	$8 \cdot 3 = \_\_\_\_\_\_$

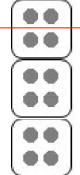
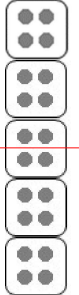
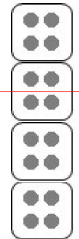
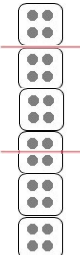
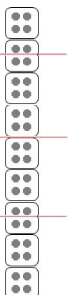
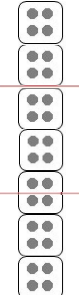
1. Piirrä tehtävästä kuvio, kirjoita lasku ja laske se. Muista kirjoittaa myös vastaus!

<p>Puistossa on neljä penkkiä. Jokaisella penkillä istuu kolme ihmistä. Kuinka monta ihmistä penkeillä istuu yhteensä?</p>     <p>Vastaus: _____</p>	<p>Sari ostaa vieraita varten kuusi palaa herkullista suklaakakkua. Yksi kakkupala maksaa 3 euroa. Kuinka monta euroa Sarin ostamat kakkupalat maksavat yhteensä?</p>     <p>Vastaus: _____</p>
<p>Äiti leipoo myyjäisiin kahdeksan omenapiirakkaa. Jokaiseen omenapiirakkaan tarvitaan kolme pientä omenaa. Kuinka monta omenaa äiti tarvitsee yhteensä?</p>     <p>Vastaus: _____</p>	<p>Juusolla oli viikonloppuna viisi jalkapallopelejä. Hän teki jokaisessa pelissä kolme maalia. Kuinka monta maalia hän teki yhteensä?</p>     <p>Vastaus: _____</p>

2. Ympyröi kolmen kertotaulun vastaukset.

18	16	30	28	40	6
12	20	21	27	11	15
2	24	3	25	9	17

1. Käytä kuviota apuna ja täydennä lasku. Punaisen viivan kohdalla alkaa uusi kymmen.

 ____ · 4 = ____	 ____ · 4 = ____	 ____ · 4 = ____
 ____ · 4 = ____	 ____ · 4 = ____	 ____ · 4 = ____

2. Laske.

$3 \cdot 4 =$ ____	$5 \cdot 4 =$ ____	$4 \cdot 4 =$ ____	$6 \cdot 2 =$ ____
$5 \cdot 4 =$ ____	$6 \cdot 4 =$ ____	$7 \cdot 4 =$ ____	$9 \cdot 2 =$ ____
$2 \cdot 4 =$ ____	$7 \cdot 4 =$ ____	$9 \cdot 4 =$ ____	$7 \cdot 2 =$ ____
$1 \cdot 4 =$ ____	$8 \cdot 4 =$ ____	$6 \cdot 4 =$ ____	$8 \cdot 2 =$ ____
$10 \cdot 4 =$ ____	$9 \cdot 4 =$ ____	$8 \cdot 4 =$ ____	$10 \cdot 2 =$ ____

3. Jatka lukujonoa.

2	4	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
4	8	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____

4. Laske. Ympyröi, kumpi laatikon laskuista oli helpompi laskea.

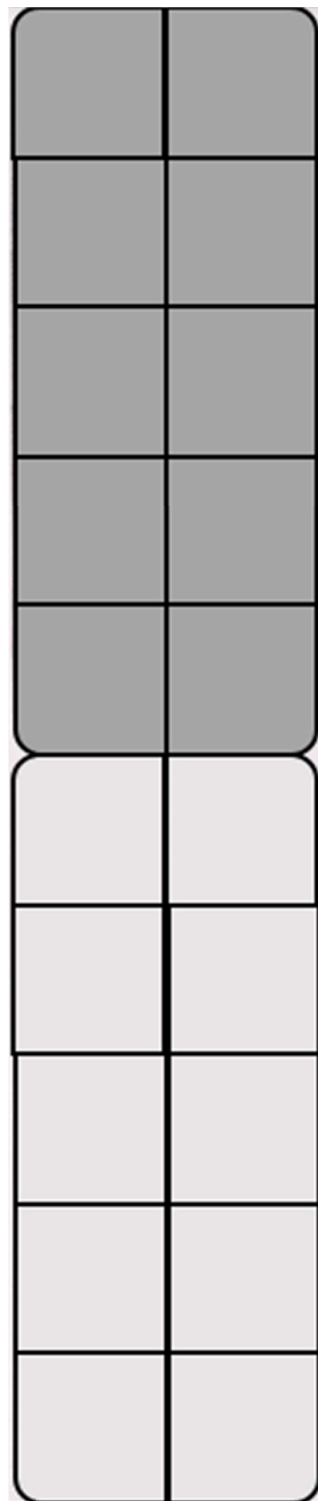
$4 \cdot 2 =$ ____	$4 \cdot 5 =$ ____	$10 \cdot 2 =$ ____	$2 \cdot 9 =$ ____
$2 \cdot 4 =$ ____	$5 \cdot 4 =$ ____	$2 \cdot 10 =$ ____	$9 \cdot 2 =$ ____

5. Ympyröi neljän kertotaulun vastaukset.

10	16	33	38	40	8
12	32	4	27	15	20
25	24	36	2	39	28

6. Piirrä laskusta kuvio, kirjoita lasku ja laske. Muista kirjoittaa myös vastaus.

<p>1. Parkkipaikalla on yhdeksän autoa. Jokaisessa autossa on neljä rengasta. Kuinka monta rengasta autoissa on yhteensä?</p> <p>_____</p> <p>Vastaus: _____</p>	<p>2. Juulia on lähtenyt ostoksille. Hän ostaa pipoa talvea varten. Jokainen pipo maksaa 4 euroa. Kuinka paljon Juulian ostokset maksavat yhteensä?</p> <p>_____</p> <p>Vastaus: _____</p>
--	--



## Liite 5(13)

### Lukumääräpalaharjoitus: kertotaulut

Tämä harjoitus on tarkoitettu toteutettavaksi pareittain. Opettaja ohjaa kerrallaan yhtä pientä oppilasryhmää, jossa on muutama pari mukana. Tätä harjoitusta voi käyttää eri kertotaulujen kohdalla, kunhan lukumääräpaloja on riittävästi.

Välineet: Lukumääräpalat, kymppikehykset (2-4kpl/pari kertotaulusta riippuen), vihkot

Oppilaat saavat pareittain 2-4 kymppikehystä riippuen siitä, minkä kertotaulun harjoittelu on kyseessä. Lukumääräpalat asetetaan oppilaiden ulottuville. Käytössä ovat vain ne lukumääräpalat, joita kyseessä olevaan kertotauluun tarvitaan.

#### Esimerkkinä 2:n kertotaulu:

Oppilailla on käytössä kakkospaloja ja jokaisella parilla on kaksi kymppikehystä, jotka on yhdistetty toisiinsa. Kymppikehyksissä on eriväriset taustat täyden kymmenen hahmottamisen tueksi.

Oppilaiden tehtävänä on muodostaa kahden kertotaulu lukumääräpaloilla yksi lasku kerrallaan. Ensinnäkin he ottavat laatikosta yhden kakkospalan ja asettavat sen kymppikehykseen. Sen jälkeen he kirjoittavat vihkoon, mikä kertolasku on kyseessä ja laskevat sen käyttäen lukumääräpala-asetelmaa tukena tarvittaessa. Sen jälkeen he ottavat yhden kakkospalan lisää, asettavat sen kymppikehykseen ja kirjoittavat jälleen laskun vihkoon. Samalla tavalla käydään koko kertotaulu läpi.

*Sopivassa vaiheessa pohditaan yhdessä, miksi kymppikehykset ovat eri värisiä ja miten se helpottaa hahmottamista ja laskemista.*

Kun pari on käynyt edellä mainitulla tavalla koko kertotaulun läpi, lisätehtävänä he saavat muodostaa toisilleen lukumääräpaloilla laskuja kymppikehyksiin. Vuorotellen toinen muodostaa laskun ja toinen kertoo, mikä lasku on kyseessä ja paljonko vastaus on.

Lisätehtävänä voidaan myös tutkia, paljonko olisi  $11 \cdot 2$  ja  $12 \cdot 2$ .

Samalla tavalla voidaan toimia myös  $3:n$  ja  $4:n$  kertotaulujen yhteydessä.

## Liite 5(14)

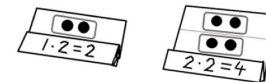
### Multiplikare

Välineet: Multiplikare-paperi

Tätä harjoitusta voidaan käyttää eri kertotaulujen yhteydessä. Tässä oppimateriaalissa harjoitusta käytettiin  $2:n$ ,  $3:n$  ja  $4:n$  kertotauluissa, joten niihin on valmiit pohjat.

Oppilaat saavat valmiiksi taitellun multiplikare-pohjan, jossa jokaisen taitoksen kohdalle on piirretty valmiiksi laatikko. Tehtävänä on avata multiplikareesta yksi taitos kerrallaan ja piirtää näkyviin tulleet laatikkoon palloja sen mukaan, mikä kertolasku on harjoiteltavana. Esimerkiksi kahden kertotaulun kohdalla piirretään laatikoihin aina kaksi palloa. Kun yhteen laatikkoon on piirretty kaksi palloa, kirjoitetaan alapuolella olevan taitoksen päälle kertolasku, joka näkyvillä olevasta kuviosta voidaan muodostaa sekä lasketaan lasku.

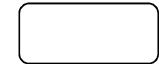
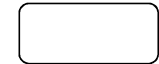
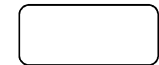
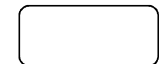
Seuraavaksi avataan yksi taitos lisää, jolloin edellisen laatikon alapuolelle ilmestyy toinen tyhjä laatikko. Tyhjään laatikkoon piirretään jälleen palloja tarvittava määrä ja kirjoitetaan alapuolelle, mikä kertolasku nyt näkyvillä olevasta kuviosta voidaan muodostaa. Sama toistuu niin kauan, että koko taiteltu multiplikare saadaan auki, jolloin koko kyseessä oleva kertotaulu on saatu käytyä läpi. Lopulta avatun multiplikareen toisella puolella on kymmenen laatikkoa palloineen eli esimerkiksi laskun  $10 \cdot 2$  mukainen kuvio ja toisella puolella on kaikki kertotaulun (esimerkiksi kahden kertotaulun) laskut.



Kun multiplikare on valmis, voidaan sen avulla harjoitella laskuja avaamalla se jostain kohtaa ja peittämällä laskun vastaus kädellä. Näkyvissä oleva kuvio toimii tukena laskun laskemisessa.

*Tehtävä on alun perin esitetty teoksessa Opi matematiikkaa leikkien esi- ja alkuopetuksessa (Ikäheimo, Aalto & Puumalainen 2004, 68–69).*

### Kahden kertotaulun multiplikare



## Kolmen kertotaulun multiplikare


## Neljän kertotaulun multiplikare


## Lukujonokorttiharjoitus kertotauluihin liittyen

Välineet: Lukujonokortit, jotka tulostetaan siten, että toisella puolella on laskujen vastaukset ja toisella puolella laskut (tarvitaan lisätehtävässä).

Tätä harjoitusta voi soveltaa minä tahansa kertotaulun kohdalla. Tässä materiaalissa harjoitusta käytettiin 2:n, 3:n, 4:n ja 5:n kertotaulujen yhteydessä, joten valmiit kortit löytyvät vain niistä. Harjoitusta voi toteuttaa sekä parityöskentelynä että opettajaohjoitaisesti.

Pariharjoitus

Oppilaat työskentelevät pareittain. Jokainen pari saa kyseessä olevaan kertotauluun liittyvät lukujonokortit, jotka he asettavat pöydälle riviin pienimmästä suurimpaan (esim. 2, 4, 6, ..., 20). Vuorotellen toinen oppilas ottaa yhden kortin lukujonosta pois ja tiivistää kortit siten, ettei puuttuvan kortin kohdalle jää selvää väliä. Toisen tehtävänä on päätellä, mikä luku puuttuu.

Harjoitukseen voi lisätä haastetta ottamalla yhtä aikaa monta lukua jonosta pois. Vielä haastavampi versio on sellainen, jossa kortteja ei laitetakaan aluksi järjestykseen pienimmästä suurimpaan, vaan ne ovat sekaisin, jolloin päättelyminen on vaikeampaa.

Lisätehtävänä on kertolaskujen laskeminen korteista. Kortit kerätään pinoon kertolaskupuoli ylöspäin. Oppilaat ottavat vuorotellen pinosta yhden kortin ja tehtävänä on laskea kortissa oleva kertolasku. Lopuksi tulos tarkistetaan kortin toiselta puolelta. Jos vastaus oli oikein, oppilas saa kortin itselleen, jos väärin, se laitetaan takaisin korttipinon pohjalle.

Opettajaohjoinen harjoitus

Opettaja asettaa harjoiteltavana olevaan kertotauluun liittyvät lukujonokortit taululle järjestykseen pienimmästä suurimpaan. Oppilaat laittavat silmät kiinni, jolloin opettaja poistaa yhden (tai useamman) luvusta. Oppilaiden tehtävänä on päätellä, mikä luku puuttuu. Lisäksi oppilaita pyydetään kertomaan, miten he päättelivät, että juuri se luku puuttuu.

Toinen opettajaohjoinen versio on, että opettaja alkaa luetella johonkin kertotauluun liittyvää lukujonoa (esim. 2, 4, 6, ...) ja jättää jostain välistä yhden luvun pois. Oppilaiden tehtävänä on huomata, milloin jokin luku jää välistä ja mikä tämä luku olisi ollut.

---

**MUISTIPELI:** Lisäksi samat kortit voidaan tulostaa siten, että vastaukset ja laskut ovat eri korteissa, jolloin niillä voidaan pelata muistipeliä. Helpommassa versiossa laskut ja vastaukset ovat erikseen, jolloin molemmista nostetaan yksi kortti ja pyritään saamaan parit. Vaikeammassa versiossa laskut ja vastaukset ovat sekaisin.

Liite 5(17)

2	4	6	8
10	12	14	16
18	20	3	6
9	12	15	18
21	24	27	30

Liite 5(18)

$1 \cdot 2$	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 2$	$4 \cdot 2$
$5 \cdot 2$	$6 \cdot 2$	$7 \cdot 2$	$8 \cdot 2$
$9 \cdot 2$	$10 \cdot 2$	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$
$3 \cdot 3$	$4 \cdot 3$	$5 \cdot 3$	$6 \cdot 3$
$7 \cdot 3$	$8 \cdot 3$	$9 \cdot 3$	$10 \cdot 3$

Liite 5(19)

4	8	12	16
20	24	28	32
36	40	5	10
15	20	25	30
35	40	45	50

Liite 5(20)

1 · 4	2 · 4	3 · 4	4 · 4
5 · 4	6 · 4	7 · 4	8 · 4
9 · 4	10 · 4	1 · 5	2 · 5
3 · 5	4 · 5	5 · 5	6 · 5
7 · 5	8 · 5	9 · 5	10 · 5

Täydennä kertotaulutikapuiden sisälle laskujen vastaukset. Aloita laatikoiden sisällä olevista tukilaskuista. Käytä niitä apuna muiden laskujen laskemisessa.

12 · 3	
11 · 3	
10 · 3	
9 · 3	
8 · 3	
7 · 3	
6 · 3	
5 · 3	
4 · 3	
3 · 3	
2 · 3	
1 · 3	

Tehtävän alkuperäinen idea on teoksesta Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan (Ikäheimo 1997, 86).

Täydennä kertotaulutikapuiden sisälle laskujen vastaukset. Aloita laatikoiden sisällä olevista tukilaskuista. Käytä niitä apuna muiden laskujen laskemisessa.

12 · 4	
11 · 4	
10 · 4	
9 · 4	
8 · 4	
7 · 4	
6 · 4	
5 · 4	
4 · 4	
3 · 4	
2 · 4	
1 · 4	

Tehtävän alkuperäinen idea on teoksesta Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan (Ikäheimo 1997, 86).



## Lukumääräpalaharjoitus: vaihdannaisuus

Välineet: Lukumääräpalat

Harjoitus toteutetaan opettajaohjoisesti, mutta oppilaat työskentelevät parin kanssa samoilla lukumääräpaloilla.

Opettaja kirjoittaa taululle laskut  $2 \cdot 3$  ja  $3 \cdot 2$ . Hän ohjeistaa, että jokaisen parin toinen oppilas rakentaa lukumääräpaloilla laskun  $2 \cdot 3$  ja toinen oppilas rakentaa laskun  $3 \cdot 2$ . Opettaja pyytää oppilaita asettamaan nämä vierekkäin.

*Pohditaan yhdessä, mitä näistä kahdesta laskusta huomataan. Mitä huomataan laskun symboliikalisesta merkinnästä? Entä mitä huomataan vastauksesta?*

Opettaja pyytää oppilaita todistamaan lukumääräpaloilla, että vastaukset ovat samat, vaikka luvut ovatkin laskussa eri päin. Oppilaat rakentavat lukumääräpaloilla muodostetut laskut päällekkäin ja näkevät, että molemmissa vastaus todella on yhtä paljon.

*Pohditaan yhdessä, tarkoittavatko laskut kuitenkin samaa asiaa, vaikka vastaus on sama. Onko kaksi kolmosta sama asia kuin kolme kakkosta? Minkälaiset yhteenlaskut näistä voidaan muodostaa? Ovatko ne samat?*

*Korostetaan kuitenkin, että laskiessa laskun voi ajatella kummin päin vaan, koska vastaus on sama. Pohditaan, että on esimerkiksi helpompi laskea, paljonko on  $2 \cdot 5$  kuin  $5 \cdot 2$ .*

Toistetaan sama toiminta muutamalla eri laskulla.

A

$3 \cdot 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$9 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$5 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 4 \cdot 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$10 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 9 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

Muista käyttää  
vaihdannaisuutta  
apuna!

Muista  
käyttää  
tukilaskuja  
apuna!

B

$3 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$9 \cdot 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 10 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 7 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

Muista käyttää  
vaihdannaisuutta  
apuna!

Muista  
käyttää  
tukilaskuja  
apuna!

C

$3 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$9 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6 \cdot 10 = \underline{\hspace{2cm}}$

$9 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$5 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 7 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 3 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

Muista käyttää  
vaihdannaisuutta  
apuna!

Muista  
käyttää  
tukilaskuja  
apuna!

D

$9 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$6 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

$8 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

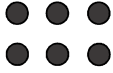
$6 \cdot 10 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 9 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

$7 \cdot 0 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 5 \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

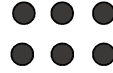
Muista käyttää  
vaihdannaisuutta  
apuna!

Muista  
käyttää  
tukilaskuja  
apuna!

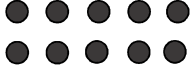
1. Ympyröi kuvasta pallot laskun osoittamalla tavalla ja laske lasku.



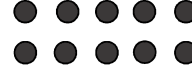
$3 \cdot 2 = \underline{\quad}$



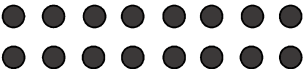
$2 \cdot 3 = \underline{\quad}$



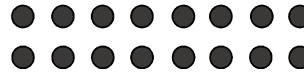
$5 \cdot 2 = \underline{\quad}$



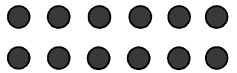
$2 \cdot 5 = \underline{\quad}$



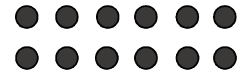
$8 \cdot 2 = \underline{\quad}$



$2 \cdot 8 = \underline{\quad}$

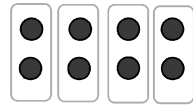


$6 \cdot 2 = \underline{\quad}$

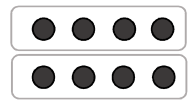


$2 \cdot 6 = \underline{\quad}$

2. Kirjoita kuvasta kertolasku ja laske.



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

3. Jatka lukujonoa.

2, 4, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

20, 18, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

4. Laske.

$2 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$4 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$8 \cdot 2 = \underline{\quad}$
$3 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$6 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$10 \cdot 2 = \underline{\quad}$
$1 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$5 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$9 \cdot 2 = \underline{\quad}$
$7 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$9 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$6 \cdot 2 = \underline{\quad}$

5. Laske. Ympyröi, kumpi laatikon laskuista oli helpompi laskea.

$4 \cdot 2 = \underline{\quad}$ $2 \cdot 4 = \underline{\quad}$	$2 \cdot 7 = \underline{\quad}$ $7 \cdot 2 = \underline{\quad}$	$9 \cdot 2 = \underline{\quad}$ $2 \cdot 9 = \underline{\quad}$
--	--	--

6. Piirrä kuva kertolaskusta ja laske.

<p style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>3 \cdot 2 = \underline{\quad}</math></p>	<p style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>2 \cdot 3 = \underline{\quad}</math></p>
---	---

**Omenaharjoitus: yhdistetyt laskutoimitukset**

Välineet: Omenakortit magneeteilla

Tämä harjoitus toteutetaan yhteisenä opettajajohtoisena opetustuokiona.

Kertolasku ja yhteenlasku

Opettaja pyytää yhtä oppilasta hakemaan hänelle korista ensin kaksi omenaa, sitten toiset kaksi omenaa ja vielä kolmannen kerran kaksi omenaa. Sen jälkeen hän pyytää oppilasta hakemaan hänelle vielä neljä omenaa. Opettaja kiinnittää omenat taululle samalla tavoin ryhmiteltynä.

*Pohditaan yhdessä, minkälainen lasku tästä toiminnasta ja taululla olevasta kuviosta voidaan muodostaa.*

Lopulta saadaan muodostettua lasku  $3 \cdot 2 + 4$ . Tutkitaan, missä järjestyksessä lasku pitäisi laskea kokeilemalla kahta eri tapaa. Lasketaan ensin siten, että lasketaan ensimmäisenä kertolasku ja sen jälkeen yhteenlasku. Kirjoitetaan vastaus taululle. Sen jälkeen kokeillaan laskea lasku toisella tavalla niin, että lasketaan ensin yhteenlasku ja sitten kertolasku. Kirjoitetaan sekin vastaus taululle.

*Pohditaan yhdessä, kumpi tapa oli oikein vertaamalla vastauksia taululla olevaan omenakuviin. Tullaan siihen tulokseen, että aina lasketaan ensin kertolasku ja sitten yhteenlasku.*

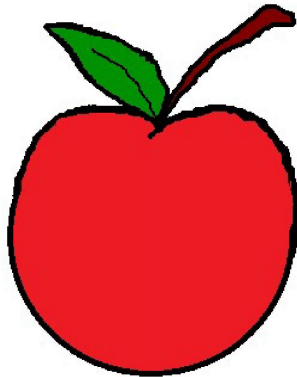
Kertolasku ja vähennyslasku

Opettaja pyytää yhtä oppilasta hakemaan hänelle korista kolme omenaa ja vielä toiset kolme omenaa. Opettaja asettaa ne taululle kahteen kolmen ryhmään ja kirjoittaa siitä taululle laskun  $2 \cdot 3$ . Sen jälkeen opettaja vielä taululta yhden omenan takaisin koriin.

*Pohditaan yhdessä, mitä laskulle nyt pitäisi tehdä, kun toiminta ja taululla oleva kuvio eivät enää vastaakaan laskua  $2 \cdot 3$ . Päädytään siihen, että täytyy vielä vähentää yksi.*

Lopulta taululle saadaan muodostettua lasku  $2 \cdot 3 - 1$ . Tutkitaan jälleen, missä järjestyksessä lasku pitää laskea kokeilemalla kahta eri tapaa. Ensin kokeillaan laskea kertolasku ja sen jälkeen vähentää. Kirjoitetaan vastaus näkyviin. Sen jälkeen kokeillaan laskea ensin vähennyslasku ja sen jälkeen kertolasku. Kirjoitetaan sekin vastaus näkyviin.


*Pohditaan yhdessä, kumpi tapa oli oikea vertaamalla vastauksia taululla olevaan omenakuviin. Tullaan siihen tulokseen, että aina lasketaan ensin kertolasku ja sitten vähennyslasku.*

**1. Kirjoita kuvasta lasku ja laske.**


Liite 6(6)

2. Jatka kuvaa niin, että se esittää yläpuolella olevaa laskua. Laske myös lasku.

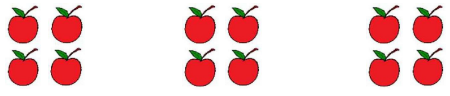
$2 \cdot 3 + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$



$2 \cdot 2 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$



$3 \cdot 4 - 3 = \underline{\hspace{2cm}}$



3. Piirrä laskusta kuva ja laske lasku.

$2 \cdot 5 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

Liite 6(7)

4. Piirrä tehtävästä kuvio, kirjoita lasku ja laske se. Muista kirjoittaa myös vastaus!

Äiti leipoo 5 omenapiirakkaa. Jokaiseen piirakkaan tarvitaan 3 omenaa. Lisäksi hän tarvitsee koristeluun 2 omenaa. Kuinka monta omenaa äiti tarvitsee yhteensä?

Vastaus:                                 

Oppilaat on jaettu neljään ryhmään. Jokaisessa ryhmässä on 5 oppilasta. Lisäksi on vielä 3 oppilasta. Kuinka monta oppilasta on yhteensä?

Vastaus:                                 

Puistossa on neljä penkkiä. Jokaisella penkillä istuu 3 ihmistä. Lisäksi puistossa on kävelyllä 2 ihmistä. Kuinka monta ihmistä puistossa on yhteensä?

Vastaus:                                 

Marilla on karkkipäivä. Hän ostaa kaksi isoja karkkipussia. Yksi karkkipussi maksaa 6 euroa. Lisäksi hän ostaa vielä yhden suklaalevyn, joka maksaa 3 euroa. Kuinka paljon Marin ostokset maksavat yhteensä?

Vastaus:

$$3 \cdot 4 + 5$$

1. Piirrä laskusta yksinkertainen kuvio.

2. Keksi ja kirjoita yllä olevasta laskusta sanallinen tehtävä.

---

---

---

---

---

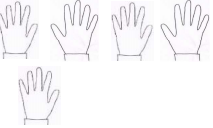
---

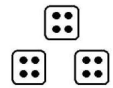
---


---

---


## 1. Tee kuvasta lasku ja laske.



  
\_\_\_\_\_

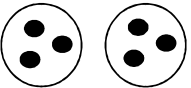

  
\_\_\_\_\_

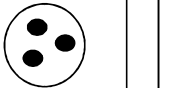

  
\_\_\_\_\_

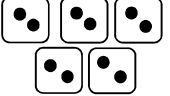
## 2. Valitse kuvaan sopiva kertolasku, kirjoita se viivalle ja laske.

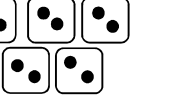
$4 \cdot 2$ 
  

  
\_\_\_\_\_

$2 \cdot 4$ 
  

  
\_\_\_\_\_

$2 \cdot 3$ 
  

  
\_\_\_\_\_

$3 \cdot 2$ 
  

  
\_\_\_\_\_

$5 \cdot 2$ 
  

  
\_\_\_\_\_

$2 \cdot 5$ 
  

  
\_\_\_\_\_

## 2. Laske.

$5 \cdot 4 =$ _____	$6 \cdot 0 =$ _____	
$7 \cdot 5 =$ _____	$7 \cdot 3 =$ _____	$7 \cdot 4 =$ _____
$2 \cdot 4 =$ _____	$8 \cdot 4 =$ _____	$3 \cdot 6 =$ _____
$6 \cdot 4 =$ _____	$9 \cdot 5 + 2 =$ _____	$4 \cdot 5 - 3 =$ _____

Muista käyttää  
vaihdannaisuutta ja  
tukilaskuja apuna!

## 3. Jatka lukujonoa.

5 , 10 , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_

4 , 8 , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_

## 4. Piirrä tehtävästä kuvio, kirjoita lasku ja laske se. Muista kirjoittaa myös vastaus!

Pasilla on kuusi korttikansiota. Jokaisessa kansiossa on neljä korttia. Kuinka monta korttia hänellä on yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

Jenna menee kauppaan. Äiti käski hänen ostaa kahdeksan jauhopussia. Yksi jauhopussi maksaa viisi euroa. Kuinka monta euroa Jennan ostokset maksavat yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

Sofia ostaa kolme karkkipussia. Jokainen pussi maksaa 4 euroa. Lisäksi hän ostaa vielä suklaalevyn, joka maksaa 5 euroa. Kuinka paljon ostokset maksavat yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_


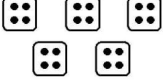

Päiväkodissa on seitsemän ryhmää. Jokaisessa ryhmässä on neljä lasta. Kuinka monta lasta päiväkodissa on yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

Nimi: \_\_\_\_\_

Nähtyt: \_\_\_\_\_


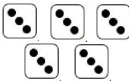
## 1. Tee kuvasta lasku ja laske.

		
_____	_____	_____

## 2. Laske.

$5 \cdot 5 =$ ____	$8 \cdot 0 =$ ____	$8 \cdot 3 =$ ____
$6 \cdot 4 =$ ____	$6 \cdot 3 =$ ____	$4 \cdot 10 =$ ____
$2 \cdot 6 =$ ____	$7 \cdot 4 =$ ____	$9 \cdot 2 =$ ____
$7 \cdot 10 + 5 =$ ____	$9 \cdot 3 + 2 =$ ____	$4 \cdot 4 - 3 =$ ____

## 3. Valitse kuvaan sopiva kertolasku, kirjoita se viivalle ja laske.

$4 \cdot 6$	$6 \cdot 4$	$5 \cdot 3$	$3 \cdot 5$
			
_____	_____		

## 6. Piirrä tehtävästä kuvio, kirjoita lasku viivalle ja laske se. Muista kirjoittaa myös vastaus!

Junassa on kuusi vaunua. Jokaisessa vaunussa on viisi matkustajaa. Kuinka monta matkustajaa junassa on yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

Mira ostaa seitsemän karkkipussia. Jokainen karkkipussi maksaa kaksi euroa. Kuinka paljon Miran ostokset maksavat yhteensä?

Vastaus: \_\_\_\_\_

## 3. Laske lasku. Keksi ja kirjoita siitä sanallinen tehtävä.

$3 \cdot 4 =$  \_\_\_\_

Arvioi vielä osaamistasi ja väritä mielestäsi oikea kuva.



Osaan hyvin.



Osaan melko hyvin.



Tarvitsen harjoitusta.



Tarvitsen paljon harjoitusta.